الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Université de Médéa

Faculté des Sciences

Concours d'accès au 3ème Cycle

Domaine : ***Sciences de la Matière*** Filière : ***Physique***

Épreuve de : ***Mathématiques et Méthodes Numériques***

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

SUJET *A*

Exercice 1 : (6 pts)

a) Déterminer la solution au problème homogène: $y\ (t) - 3\,y(t) = \sin 3t\,;\,y(0) = 0$.

b) Déterminer la solution au problème suivant: $y\ \ (t) - 4\,y\ (t) + 4\,y(t) = 9e^{-t};\,y(0) = 0, y\ (0) = 0$.

1) Soit l'intégrale :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta}\,;\,a > 1, \qquad a \text{ est un nombre réel.}$$

Montrer, en faisant un changement de variable, que l'on peut écrire:

$$I = \oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{2dz}{z^2 + 2aiz - 1}$$

ou C est un cercle de rayon unité centré sur l'origine.

2) Trouver les pôles (z_1, z_2) de $f(z)$ et montrer qu'un seul se trouve à l'intérieur de C.

3) Déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2 : (7 pts)

Soit l'intégrale $I = \int_0^1 e^x\,dx$

a) Calculer l'intégrale I analytiquement.

b) Approcher l'intégrale I par une application de la méthode des trapèzes pour n= 6.

c) Approcher l'intégrale I par une application de la méthode de Simpson pour n= 6.

d) Donner l'erreur relative commise dans chaque cas en pourcentage.

e) Comparer les résultats obtenus.

On donne :

Méthode des trapèzes : $I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+i*h)\right)$ avec $h = \frac{b-a}{n}$.

Méthode de Simpson : $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{i\ pair} f(x_i) + 4\sum_{i\ impair} f(x_i) + f(b)\right)$

L'erreur relative : $E_T = \frac{\left|I_{analytique} - I_{trapèzes}\right|}{I_{analytique}}$ et $E_S = \frac{\left|I_{analytique} - I_{simpson}\right|}{I_{analytique}}$

Exercice 3 : (7 pts)

Les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation suivante : $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

a) Calculer $T_0(x), T_1(x)$, ainsi que $T_2(-1)$ et $T_3(1/2)$.

b) Montrer la relation de récurrence suivante : $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2x\,T_{n+1}(x)$.

c) En déduire $T_2(x)$ et $T_3(x)$, et vérifier les valeurs de $T_2(-1)$ et $T_3(1/2)$ trouvées en a).

d) Vérifier que $T_n(x)$ est solution de l'équation différentielle : $(1 - x^2)y\ \ - xy\ + n^2 y = 0$.

e) Résoudre l'équation $T_n(x) = 0$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Université de Médéa

Faculté des Sciences

Concours d'accès au 3ème Cycle
Domaine : ***Sciences de la Matière*** Filière : ***Physique***
Épreuve de : ***Mathématiques et Méthodes Numériques***
Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

Corrigé et Barème SUJET *A*

Exercice 1 : (6 pts)

a) $y\ (t) - 3y(t) = sin3t\,;\ y(t) = y_H(t) + y_p(t),$

$$\boldsymbol{y_H(t) = y_0 e^{3t}\ (0.5\ \mathrm{pt}),}$$

$$y_p(t) = asin3t + b\,cos3t, \Rightarrow \boldsymbol{y_p(t) = -\frac{1}{6}\,(sin3t + cos3t)\ (0.5\ \mathrm{pt}),}$$

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{1}{6}\left(e^{3t} - sin3t - cos3t\right)(0.5\ \mathrm{pt}).}$$

b) $y\ \ (t) - 4y\ (t) + 4y(t) = 9\,e^{-t};\ r^2 - 4r + 4 = 0, \Rightarrow \boldsymbol{r_{1,2} = 2\ (0.25\ \mathrm{pt})}$

$$\boldsymbol{y_H(t) = (\alpha + \beta t)e^{2t}\ (0.25\ \mathrm{pt}),}$$

$$\boldsymbol{y_p(t) = e^{-t}\ (0.25\ \mathrm{pt}),}$$

$$\boldsymbol{y(t) = (\alpha + \beta t)e^{2t} + e^{-t}\ (0.25\ \mathrm{pt}),}$$

$$\boldsymbol{y(t) = (-1 + 3t)e^{2t} + e^{-t}\ (0.5\ \mathrm{pt}),}$$

c)
1)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + sin\theta}\ ; a > 1,$$

On pose

$$\boldsymbol{z = e^{i\theta} = cos\theta + i\,sin\theta, (0.25\ \mathrm{pt})}$$

$$\boldsymbol{sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2i\,z}, (0.5\ \mathrm{pt}); d\theta = \frac{dz}{iz}, (0.25\ \mathrm{pt})}$$

$$\boldsymbol{I = \oint_C \frac{2dz}{z^2 + 2aiz - 1}, (0.5\ \mathrm{pt})}$$

2)

$$\boldsymbol{z_1 = -\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) i, (0.25\ \mathrm{pt})\ ;\ z_2 = -\left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right) i, (0.25\ \mathrm{pt}).}$$

$$|z_2| < 1\ ;\ |z_1| > 1, \Rightarrow\ \boldsymbol{z_2 \text{ est à l intrieur de } C, (0.25\ \mathrm{pt}).}$$

3)

$$\boldsymbol{I = 2\pi\, i\, Rés(f, z_2) = 2\pi\, i \lim_{z \to z_2} (z - z_2)\, f(z)}, \textbf{(0.25 pt)},$$

$$\boldsymbol{I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}}. \textbf{(0.5 pt)}$$

Exercice 2 : (7 pts)

a) Solution analytique :

Puisque nous connaissons la dérivée : $\frac{de^x}{dx} = e^x$, nous pouvons utiliser le théorème fondamental du calcul :

$$\int e^x\,dx = \int \frac{de^x}{dx}\,dx = e^x + c \Rightarrow \int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = 1.71828 \ (\mathbf{1\ pt}).$$

b) Méthode des trapèzes pour n= 6. Posons $x_i = a + h*i$, $i = 0,\ldots,n$.

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{1}{6}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{i=1}^{5} f(0+i*\frac{1}{6})\right) \\ &\approx \frac{1}{6}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + f(\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{5}{6})\right) (\mathbf{2\ pts}) \\ &\approx 1.72226 \end{aligned}$$

c) Méthode de Simpson pour n= 6. Posons $x_i = a + h*i$, $i = 0,\ldots,n$.

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum\nolimits_{i\ pair} f(x_i) + 4\sum\nolimits_{i\ impair} f(x_i) + f(b)\right) \\ &\approx \frac{1}{18}\left(f(0) + 2(f(x_2) + f(x_4)) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + f(1)\right) (\mathbf{2\ pts}) \\ &\approx \frac{1}{18}\left(f(0) + 2(f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3})) + 4(f(\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{5}{6})) + f(1)\right) \\ &\approx 1.71829 \end{aligned}$$

d) L'erreur relative commise est :

$$E_T = \frac{\left|I_{analytique} - I_{trapèzes}\right|}{I_{analytique}} = \frac{\left|1.71828\text{-}1.72226\right|}{1.71828} = 0.00397 = 0.2\,\% \ (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$E_S = \frac{\left|I_{analytique} - I_{simpson}\right|}{I_{analytique}} = \frac{\left|1.71828\text{-}1.71829\right|}{1.71828} = 0.000004 = 4 10^{-4}\,\% \ (\mathbf{0.5\ pt})$$

e) Remarquons que $E_S < E_T$. Donc la méthode la plus précise est celle de Simpson et la moins précise est celle des trapèzes. (**1 pt**)

Exercice 3 : (7 pts)

Les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation suivante : $T_n(x) = \cos(n \text{ arcos}x)$.

a) Calculer $T_0(x)$, $T_1(x)$, ainsi que $T_2(-1)$ et $T_3(1/2)$.

$$\boldsymbol{T_0(x)} = \cos(0) = \mathbf{1}, (\mathbf{0.25\ pt})$$
$$\boldsymbol{T_1(x)} = \cos(\text{ arcos}x) = \boldsymbol{x}, (\mathbf{0.25\ pt})$$
$$\boldsymbol{T_2(-1)} = \cos(2 \text{ arcos}[-1]) = \cos(2\,\pi) = \mathbf{1}, (\mathbf{0.25\ pt})$$
$$\boldsymbol{T_3(1/2)} = \cos(3 \text{ arcos}[1/2]) = \cos(3\,\pi/3) = \mathbf{-1}, (\mathbf{0.25\ pt})$$

b) Montrer la relation de récurrence suivante : $T_{n+2}(x) + T_n(x) = 2x\, T_{n+1}(x)$.
On utilise la formule d'addition des cosinus :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right), (*)$$

$$\boldsymbol{T_{n+2}(x)} + \boldsymbol{T_n(x)} = \cos([n+2]\text{ arcos}x) + \cos(n \text{ arcos}x) \overset{(*)}{\triangleq} 2\cos([n+1]\text{arcos}x)\cos(\text{arcos}x) = \boldsymbol{2\,x\,T_{n+1}(x)}. (\mathbf{1\ pt})$$

En déduire $T_2(x)$ et $T_3(x)$,

On met $n = 0$ dans la relation de récurrence :

$$\boldsymbol{T_2(x)} = -T_0(x) + 2x\,T_1(x) = -1 + 2x.x = \mathbf{-1 + 2x^2}(\mathbf{0.25\ pt}),$$

On met $n = 1$ dans la relation de récurrence :

$$\boldsymbol{T_3(x)} = -T_1(x) + 2x\,T_2(x) = -x + 2x(-1+2x^2) = \mathbf{-3x + 4x^3}(\mathbf{0.25\ pt}).$$

et vérifier les valeurs de $T_2(-1)$ et $T_3(1/2)$ trouvées en a).

$$\boldsymbol{T_2(-1)} = \mathbf{-1 + 2(-1)^2 = 1}, (\mathbf{0.25\ pt})$$

$$\boldsymbol{T_3(1/2)} == -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{8}} = \mathbf{-1}. (\mathbf{0.25\ pt})$$

c) Vérifier que $T_n(x)$ est solution de l'équation différentielle : $(1-x^2)y \;\; - \; xy \; + \; n^2 y = 0$.

Rappel :

$$\text{arcos }(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On a :

$$T_n(x) = \frac{n\sin(n \text{ arcos}x)}{\sqrt{1-x^2}}, (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$T_n\ (x) = \frac{-\,n^2\cos(n \text{ arcos}x) + n\sin(n \text{ arcos}x)x(1-x^2)^{-1/2}}{(1-x^2)},$$

$$T_n''(x) = -\frac{n^2\cos(n\,\mathrm{arcos}x)}{(1-x^2)} + \frac{nx\sin(n\,\mathrm{arcos}x)}{(1-x^2)^{3/2}}, (\mathbf{1.5\ pts})$$

L'équation différentielle devient:

$$(1-x^2)\left[-\frac{n^2\cos(n\,\mathrm{arcos}x)}{(1-x^2)} + \frac{nx\sin(n\,\mathrm{arcos}x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] - x\frac{n\sin(n\,\mathrm{arcos}x)}{\sqrt{1-x^2}} + n^2\cos(n\,\mathrm{arcos}x) =$$

$$\boldsymbol{-n^2\cos(n\,\mathrm{arcos}x) - \frac{nx\sin(n\,\mathrm{arcos}x)}{\sqrt{1-x^2}} - x\frac{n\sin(n\,\mathrm{arcos}x)}{\sqrt{1-x^2}} + n^2\cos(n\,\mathrm{arcos}x) = 0\ CQFD.}$$

d) Résoudre l'équation $T_n(x) = 0$.

$$T_n(x) = \cos(n\,\mathrm{arcos}x) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n\,\mathrm{arcos}x = \frac{(2k+1)\pi}{2}}\ (\mathbf{0.5\ pt}) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x = \cos\left(\frac{[2k+1]\pi}{2n}\right), n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots\ (1.5\ pts)}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Université de Médéa

Faculté des Sciences

Concours d'accès au 3$^{\text{ème}}$ Cycle

Domaine : ***Sciences de la Matière*** Filière : ***Physique***

Épreuve de : ***Mathématiques et Méthodes Numériques***

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

SUJET *B*

Exercice 1 : (6 pts)

a) Déterminer la solution au problème homogène: $y'(t) - 3\,y(t) = \sin 3t$;

$$y(0) = 0.$$

b) Déterminer la solution au problème suivant: $y\ \ (t) - 4\,y\ \ (t) + 4\,y(t) = 9e^{-t}$;

$$y(0) = 0, y\ \ (0) = 0.$$

1) Soit l'intégrale :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta};$$

$a > 1$. a est un nombre réel.

Montrer, en faisant un changement de variable, que l'on peut écrire:

$$I = \oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{2dz}{z^2 + 2aiz - 1}$$

ou C est un cercle de rayon unité centré sur l'origine.

2) Trouver les pôles (z_1, z_2) de $f(z)$ et montrer qu'un seul se trouve à l'intérieur de C.

3) Déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2 : (7 pts)

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - 2x / y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Utiliser la méthode d'Euler pour calculer les premières 5 valeurs de la solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y'(x)$, en prenant le pas $h = 0.2$.

b) En utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, calculer les premières 5 valeurs approchées de la solution du problème $y'(x)$ avec le même pas h= 0.2.

c) Estimer les résultats obtenus si la solution exacte est $y(x) = \sqrt{2x+1}$. Quelle est la méthode la plus proche à celle de la méthode exacte ?

On donne :

Méthode d'Euler : $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i)$

Méthode de Runge-Kutta 4 : $k_1 = h\ f(x_i, y_i)$;

$$k_2 = h\ f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})\ ;\ k_3 = h\ f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h\ f(x_i + h, y_i + k_3)\ ;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

Exercice 3 : (7 pts)

On donne la fonction génératrice des fonctions de Bessel d'indice entier :

$$\exp\left(\frac{x\,(t^2 - 1)}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n.$$

a) En dérivant partiellement par rapport à la variable t montrer la relation de récurrence suivante :

$$2n\,J_n(x) = x\big(J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)\big)$$

b) En dérivant partiellement par rapport à la variable x, montrer la relation de récurrence suivante :

$$2J_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

c) En déduire alors les relations de récurrence :

c1) $x\,J_n(x) = n\,J_n(x) - x\,J_{n+1}(x)$.

c2) $x\,J_n(x) = x\,J_{n-1}(x) - \ n\,J_n(x)$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Université de Médéa

Faculté des Sciences

Concours d'accès au 3ème Cycle

Domaine : ***Sciences de la Matière*** Filière : ***Physique***

Épreuve de : ***Mathématiques et Méthodes Numériques***

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

Corrigé et Barème SUJET B

Exercice 1 : (6 pts)

a) $y'=\frac{2t}{1-t^2}y \Rightarrow \int \frac{dy}{y}=\int \frac{2t}{1-t^2}dt \Rightarrow y=y_0\frac{1}{1-t^2}$ **(0.5 pt)**

pour $t=0$ on a $y(0)=y_0=1$

$y=\frac{1}{1-t^2}$ **(0.5 pt)**

b) $y''+y'-2y=10\cos t$; $r^2+r-2=0$; $r_1=-2; r_2=1$ **(0.5 pt)**

$y_H(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{t}$ **(0.25 pt)**

$y_p(t)=a\cos t+b\sin t$ **(0.25 pt)**

On trouve $a=-3$ et $b=1$ **(0.5 pt)**

$y(t)=y_H(t)+y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{t}-3\cos t+\sin t$ **(0.5 pt)**

c) 1) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$: on pose $z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ **(0.25 pt)**

$\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})=\frac{1}{2i}(\frac{z^2-1}{z})$ **(0.5 pt)**

$d\theta=\frac{dz}{iz}$ **(0.25 pt)**

$I=\oint\frac{2dz}{z^2+4iz-1}$ **(0.5 pt)**

2) $z_1=(-2+\sqrt{3})\,i$; $z_2=(-2-\sqrt{3})\,i$ **(0.5 pt)**

$|z_1|<1; |z_2|>1$ z_1 est à l'intérieur C **(0.25 pt)**

3) $I = 2\pi i \, Rés(f, z_1) = 2\pi i \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z)$ **(0.25 pt)**

$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ **(0.75 pt)**

Exercice 2 : (7 pts)

a) La méthode d'Euler: $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i)$

$y_1 = y_0 + 0.2*(y_0 - 2x_0 / y_0) \Rightarrow y_1 = 1 + 0.2*(1 - 2*0/1) = 1.2$ **(0.5 pt)**

$y_2 = y_1 + 0.2*(y_1 - 2x_1 / y_1) \Rightarrow y_2 = 1.2 + 0.2*(1.2 - 2*0.2/1.2) = 1.3733$ **(0.5 pt)**

$y_3 = y_2 + 0.2*(y_2 - 2x_2 / y_2) \Rightarrow y_3 = 1.3733 + 0.2*(1.3733 - 2*0.4/1.3733) = 1.5315$ **(0.5 pt)**

$y_4 = y_3 + 0.2*(y_3 - 2x_3 / y_3) \Rightarrow y_4 = 1.3733 + 0.2*(1.5315 - 2*0.6/1.5315) = 1.68108$ **(0.5 pt)**

$y_5 = y_4 + 0.2*(y_4 - 2x_4 / y_4) \Rightarrow y_5 = 1.68108 + 0.2*(1.68108 - 2*0.8/1.68108) = 1.82695$ **(0.5 pt)**

b) La méthode de Runge-Kutta 4 :

Première étape : i=0

$k_1 = h\, f(x_0, y_0) = 0.2*(1 - 2*0/1) = 0.2$

$k_2 = h\, f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1 + 0.2/2) - 2(0 + 0.2/2))/(1 + 0.2/2) = 0.1836$

$k_3 = h\, f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1 + 0.1838/2) - 2(0 + 0.2/2))/(1 + 0.1838/2) = 0.1817$

$k_4 = h\, f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2((1 + 0.1817) - 2(0 + 0.2))/(1 + 0.1817) = 0.1686$

$y_1 = y_0 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} = 1.1832$ **(0.5 pt)**

Deuxième étape : i=1

$k_1 = h\, f(x_1, y_1) = 0.2*(1.1832 - 2*0.2/1.1832) = 0.1690$

$k_2 = h\, f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1.1832 + 0.1690/2) - 2(0.2 + 0.2/2))/(1.1832 + 0.1690/2) = 0.1589$

$k_3 = h\, f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1.1832 + 0.1589/2) - 2(0.2 + 0.2/2))/(1.1832 + 0.1589/2) = 0.1575$

$$k_4 = h\, f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.2((1.1832 + 0.1575) - 2(0.2 + 0.2))/(1.1832 + 0.1575) = 0.1488$$

$y_2 = y_1 + \dfrac{k_1}{6} + \dfrac{k_2}{3} + \dfrac{k_3}{3} + \dfrac{k_4}{6} = 1.3417$ **(0.5 pt)**

Troisième étape : i=2

$$k_1 = h\, f(x_2, y_2) = 0.2 * (1.3417 - 2 * 0.4 / 1.3417) = 0.1490$$

$$k_2 = h\, f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1.3417 + 0.1486/2) - 2(0.4 + 0.2/2))/(1.3417 + 0.1486/2) = 0.1420$$

$$k_3 = h\, f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1.3417 + 0.1414/2) - 2(0.4 + 0.2/2))/(1.3417 + 0.1414/2) = 0.1409$$

$$k_4 = h\, f(x_2 + h, y_2 + k_3) = 0.2((1.3417 + 0.1404) - 2(0.4 + 0.2))/(1.3417 + 0.1404) = 0.1347$$

$y_3 = y_2 + \dfrac{k_1}{6} + \dfrac{k_2}{3} + \dfrac{k_3}{3} + \dfrac{k_4}{6} = 1.4833$ **(0.5 pt)**

Quatrième étape : i=3

$$k_1 = h\, f(x_3, y_3) = 0.2 * (1.4833 - 2 * 0.6 / 1.4833) = 0.1349$$

$$k_2 = h\, f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1.4833 + 0.1347/2) - 2(0.6 + 0.2/2))/(1.4833 + 0.1347/2) = 0.1296$$

$$k_3 = h\, f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1.4833 + 0.1294/2) - 2(0.6 + 0.2/2))/(1.4833 + 0.1294/2) = 0.1288$$

$$k_4 = h\, f(x_3 + h, y_3 + k_3) = 0.2((1.4833 + 0.1285) - 2(0.6 + 0.2))/(1.4833 + 0.1285) = 0.1239$$

$y_4 = y_3 + \dfrac{k_1}{6} + \dfrac{k_2}{3} + \dfrac{k_3}{3} + \dfrac{k_4}{6} = 1.6125$ **(0.5 pt)**

Cinquième étape : i=4

$$k_1 = h\, f(x_4, y_4) = 0.2 * (1.6125 - 2 * 0.8 / 1.6125) = 0.1240$$

$$k_2 = h\, f(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{k_1}{2}) = 0.2((1.6125 + 0.1237/2) - 2(0.8 + 0.2/2))/(1.6125 + 0.1237/2) = 0.1199$$

$$k_3 = h\, f(x_4 + \frac{h}{2}, y_4 + \frac{k_2}{2}) = 0.2((1.6125 + 0.1196/2) - 2(0.8 + 0.2/2))/(1.6125 + 0.1196/2) = 0.1192$$

$$k_4 = h\, f(x_4 + h, y_4 + k_3) = 0.2((1.6125 + 0.1189) - 2(0.8 + 0.2))/(1.6125 + 0.1189) = 0.1154$$

$y_5 = y_4 + \dfrac{k_1}{6} + \dfrac{k_2}{3} + \dfrac{k_3}{3} + \dfrac{k_4}{6} = 1.7321$ **(0.5 pt)**

c) La solution exacte:

Les valeurs exactes sont:

{0, 1}, {0.2, 1.18322}, {0.4, 1.34164}, {0.6, 1.48324}, {0.8, 1.61245}, {1, 1.73205} **(1.5 pts)**

D'après les calculs, la méthode la plus proche à celle de la méthode exacte est la méthode de **Runge-Kutta 4. (0.5 pt)**

Exercice 3 : (7 pts)

On donne la fonction génératrice des fonctions de Bessel d'indice entier :

$$\exp\left(\frac{x\,(t^2-1)}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n.$$

a) En dérivant partiellement par rapport à la variable t montrer la relation de récurrence suivante :

$$2n\,J_n(x) = x\big(J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)\big)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\exp\left(\frac{x\,(t^2-1)}{2t}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n\right),$$

$$\frac{x(t^2+1)}{2t^2}\exp\left(\frac{x\,(t^2-1)}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,J_n(x)\,t^{n-1}(\mathbf{1\ pt})\,,$$

$$x(t^2+1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n = 2t^2\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,J_n(x)\,t^{n-1},$$

$$x\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^{n+2} + x\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2n\,J_n(x)\,t^{n+1} = 0,$$

Posons $m = n+1$ dans la première somme, $m = n-1$ dans la seconde, et $m = n$ dans la dernière : ($\mathbf{0.5\ pt}$)

$$x\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m-1}(x)\,t^{m+1} + x\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+1}(x)\,t^{m+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2m\,J_m(x)\,t^{m+1} = 0,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [xJ_{m-1}(x) + xJ_{m+1}(x) - 2m\,J_m(x)]\,t^{m+1} = 0,$$

Cette série étant identiquement nulle, cela implique :

$$\boldsymbol{xJ_{m-1}(x) + xJ_{m+1}(x) - 2m\,J_m(x) = 0.\,(1\ pt)}$$

b) En dérivant partiellement par rapport à la variable x, montrer la relation de récurrence suivante :

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(\frac{x\,(t^2-1)}{2t}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,t^n\right),$$

$$\frac{(t^2-1)}{2t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x)\, t^n \quad (\mathbf{1\ pt}),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^{n+2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2J'_n(x)\, t^{n+1} = 0,$$

Posons $m = n+1$ dans la première somme, $m = n-1$ dans la seconde, et $m = n$ dans la dernière : ($\mathbf{0.5\ pt}$)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m-1}(x)\, t^{m+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m+1}(x)\, t^{m+1} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2J'_m(x)\, t^{m+1} = 0,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} [J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) - 2J'_m(x)]\, t^{m+1} = 0,$$

Cette série étant identiquement nulle, cela implique :

$$\boldsymbol{J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2J'_m(x).\ (1\ \mathrm{pt})}$$

c) En déduire alors les relations de récurrence :

c1)

$$x\, J'_n(x) = n\, J_n(x) - x\, J_{n+1}(x).$$

Multiplions par x la relation obtenue au b) :

$$xJ_{n-1}(x) - xJ_{n+1}(x) - 2xJ'_n(x) = 0.$$

Faisons la différence entre cette dernière relation et celle obtenue au a) :

$$xJ_{n-1}(x) - xJ_{n+1}(x) - 2xJ'_n(x) - xJ_{n-1}(x) - xJ_{n+1}(x) + 2n\, J_n(x) = 0.$$

$$-2xJ'_n(x) - 2xJ_{n+1}(x) + 2n\, J_n(x) = 0.$$

$$\boldsymbol{xJ'_n(x) = n\, J_n(x) - xJ_{n+1}(x).\ (1\ \mathrm{pt})}$$

c2)

$$x\, J'_n(x) = x\, J_{n-1}(x) - n\, J_n(x).$$

Multiplions par x la relation obtenue au b) :

$$xJ_{n-1}(x) - xJ_{n+1}(x) - 2xJ'_n(x) = 0.$$

Faisons la somme entre cette dernière relation et celle obtenue au a)

$$xJ_{n-1}(x) - xJ_{n+1}(x) - 2xJ'_n(x) + xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x) - 2n\, J_n(x) = 0.$$

$$-2xJ'_n(x) + 2xJ_{n-1}(x) - 2n\, J_n(x) = 0.$$

$$\boldsymbol{xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - n\, J_n(x).\ (1\ \mathrm{pt})}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Université de Médéa

Faculté des Sciences

Concours d'accès au 3ème Cycle

Domaine : ***Sciences de la Matière*** Filière : ***Physique***

Épreuve de : ***Mathématiques et Méthodes Numériques***

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

SUJET *C*

Exercice 1 : (6 pts)

a) Déterminer la solution au problème suivant:
$y\ (t) - y(t) = 4 - t^2; y(0) = -1.$

b) Déterminer les solutions au problème suivant:

$$y\ \ (t) - 2\,y\ (t) + \ y(t) = -2e^t;$$
$$y(0) = -2, y\ (0) = 0.$$

c) Soit l'intégrale:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta}.$$

1) En faisant un changement de variable, montrer que l'on peut écrire :

$$I = \oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{-2i}{z^2 + 6z + 1}dz,$$

où C est un cercle de rayon unité centré sur l'origine.

2) Trouver les pôles (z_1, z_2) de $f(z)$ et montrer qu'un seul se trouve à l'intérieur de C.

3) Déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2 : (7 pts)

Soit $f(x) = (\cos(2x))^2 - x^2$

a) Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une racine r dans l'intervalle [0, 1].

b) Donner l'algorithme de Newton permettant de calculer cette racine (prendre $x_0 = 0.2$).

c) Calculer la racine r en utilisant l'algorithme précédent.
(critère d'arrêt : $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4}$).

d) En déduire (sans faire le calcul) une racine r' de $f(x) = 0$ dans l'intervalle [-1, 0].

Exercice 3 : (7 pts)

Les fonctions Γ et β d'Euler sont définies pour $x > 0$ et $y > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ dt, \text{et}$$

$$\beta(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt.$$

Elles sont reliées par la relation fonctionnelle :

$$\beta(u, v) = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

a) Montrer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation de récurrence : $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$.

b) Montrer que $\beta(u, v) = \beta(v, u)$.

c) Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt[3]{x} e^{-x^2} dx\ ,$$

d) Montrer que :

$$a\,\beta(a, b+1) = b\,\beta(a+1, b).$$

d1) En déduire pour $a \neq 0$ que :

$$\beta(a, n) = \frac{n-1}{a}\,\beta(a+1, n-1)\ ,$$

d2) puis pour $a \in \mathbb{N}^*$ établir la relation :

$$\beta(a, n) = \frac{1\,.\,2\ \dots\ (n-1)}{a\ (a+1)\ \dots\ (a+n-1)}\ .$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Université de Médéa

Faculté des Sciences

Concours d'accès au 3ème Cycle

Domaine : ***Sciences de la Matière*** Filière : ***Physique***

Épreuve de : ***Mathématiques et Méthodes Numériques***

Date : 24 février 2022 Durée : 1h30

Corrigé et Barème SUJET C

Exercice 1 : (6 pts)

a) $y'(t) - y(t) = 4 - t^2$

$y_H(t) = c_1 e^t$ **(0.25 pt)**

pour $y_p(t) = at^2 + bt + c$ **(0.25 pt)**

on obtient $y_p(t) = t^2 + 2t - 2$ **(0.25 pt)**

$y(t) = c_1 e^t + t^2 + 2t - 2$ **(0.25 pt)**

Avec $y(0) = -1$; $y(t) = e^t + t^2 + 2t - 2$ **(0.25 pt)**

b) $y'' - 2y' + y = -2e^t \rightarrow (r^2 - 2r + 1) = 0$; $r_{1,2} = 1$ **(0.25 pt)**

$y_H(t) = (\alpha + \beta t)e^t$ **(0.25 pt)**

on pose $y_p(t) = ze^t$ **(0.25 pt)**

L'équation différentielle donne $z''e^t = -2e^t \Rightarrow z'' = -2$

On peut prendre $z(t) = -t^2$ **(0.25 pt)**

$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = (\alpha + \beta t)e^t - t^2 e^t$ **(0.25 pt)**

Les conditions $y'(0) = 0$ et $y(0) = 2 \Rightarrow \alpha = -2$; **(0.25 pt)** $\beta = +2$ **(0.25 pt)**

$y(t) = -(2 - 2t)e^t - t^2 e^t$ **(0.25 pt)**

c) 1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta}$: on pose $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ **(0.25 pt)**

$\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$; **(0.25 pt)**

$d\theta = \frac{dz}{iz}$ **(0.25 pt)**

$I = \oint \frac{-2idz}{z^2 + 6z + 1}$ **(0.5 pt)**

2) $z_1 = -3 - 2\sqrt{2}$; **(0.25 pt)** $z_2 = -3 + 2\sqrt{2}$ **(0.25 pt)**

$|z_1| > 1;\ |z_2| < 1 \Rightarrow z_2$ est à l'intérieur de C **(0.25 pt)**

3) $I = 2\pi i\, Rés(f, z_2) = 2\pi i \lim_{z \to z_2}(z - z_2) f(z)$ **(0.25 pt)**

$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **(0.5 pt)**

Exercice 2 : (7 pts)

a) On a $f(x) = 0$ est continue dans l'intervalle [0, 1] **(0.5 pt)** et $f(0) * f(1) = -\ 0.8268 < 0$ **(0.5 pt)** et par conséquent $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans l'intervalle [0, 1] **(0.5 pt).**

b) L'algorithme de la méthode de Newton s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_0 = 0.2 \\ \text{critère d'arrêt} : |x_{k+1} - x_k| \le 10^{-4} \end{cases}$$ **(1.5 pt)**

c) On Effectue quelques itérations de la méthode à partir du point $x_0 = 0.2$

$(\text{critère d'arrêt} : |x_{k+1} - x_k| \le 10^{-4})$.

$x_1 = 0.6406$; $x_2 = 0.5022$; $x_3 = 0.5149$.**(3*0.5 pt)**

La racine de la fonction $f(x) = (\cos(2x))^2 - x^2 = 0$ est $r = 0.5149$. **(0.5 pt)**

d) En déduire une racine r' de $f(x) = 0$ dans l'intervalle [-1, 0].

$f(x)$ est une fonction paire, $f(-r) = -f(r) = 0 \Rightarrow r' = -r = -0.5149$ **(2 pt)**

Exercice 3 : (7 pts)

Les fonctions Γ et β d'Euler sont définies pour $x > 0$ et $y > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt, (*) \text{ et}$$

$$\beta(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt.\ (**)$$

Elles sont reliées par la relation fonctionnelle :

$$\beta(u,v) = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

a) Montrer pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation de récurrence : $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$.

La définition $(*)$ de la fonction Γ d'Euler donne pour $x \equiv (n+1)$:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^n\, dt,$$

Procédons par intégration par parties posons :

$du = e^{-t}\, dt\,, u = -e^{-t}\,; v = t^n\,, dv = n\, t^{n-1} dt,$

$$\boldsymbol{\Gamma(n+1)} = \int_0^\infty e^{-t}\, t^n\, dt = \underbrace{\left(-e^{-t}\, t^n\right)\Big|_0^\infty}_{=0} + n\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n-1}\, dt = \boldsymbol{n\,\Gamma(n)}.\ (\mathbf{1\ pt})$$

b) Montrer que $\beta(u,v) = \beta(v,u)$.

Faisons le changement de variable suivant dans la définition de la fonction β d'Euler $(**)$:

$$x = 1-t, t = 1-x, dt = -dx\,, t = 0 \to x = 1;\ t = 1 \to x = 0,$$

$$\boldsymbol{\beta(u,v)} = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt = -\int_1^0 (1-x)^{u-1} x^{v-1} dt. = \int_0^1 x^{v-1}(1-x)^{u-1} dt = \boldsymbol{\beta(v,u)}, (\mathbf{1\ pt})$$

c) Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^\infty \sqrt[3]{x}\, e^{-x^2} dx\,,$$

Posons

$$t = x^2, x = t^{\frac{1}{2}}, dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt,$$

$$\boldsymbol{I} = \int_{\mathbf{0}}^\infty \boldsymbol{\sqrt[3]{x} e^{-x^2} dx} = \int_0^\infty \frac{e^{-t}\, t^{1/6}}{2t^{1/2}} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{-1/3} dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{(2/3)-1} dt = \frac{\boldsymbol{\Gamma(2/3)}}{\mathbf{2}}.\ (\mathbf{2\ pts})$$

d) Montrer que :

$$a\,\beta(a,b+1) = b\,\beta(a+1,b).$$

$$\boldsymbol{a\,\beta(a,b+1)} = \frac{a\,\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{\Gamma(a+1)\, b\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} = \boldsymbol{b\,\beta(a+1,b)}.\ (\mathbf{1\ pt})$$

d1) En déduire pour $a \neq 0$ que :

$$\beta(a,n)=\frac{n-1}{a}\ \beta(a+1,n-1)\ ,$$

De b) on tire

$$\beta(a,b+1)=\frac{b}{a}\ \beta(a+1,b),$$

Mettons maintenant $b=n-1$ on obtient

$$\boldsymbol{\beta(a,n)=\frac{(n-1)}{a}\ \beta(a+1,n-1).\,(0.5\ \mathrm{pt})}$$

d2) puis pour $a\ \in\ \mathbb{N}^*$ établir la relation :

$$\beta(a,n)=\frac{1\,.\,2\ \ldots\ (n-1)}{a\ (a+1)\ \ldots\ (a+n-1)}\,.$$

$$\boldsymbol{\beta(a,n)}=\frac{(n-1)}{a}\ \beta(a+1,n-1)=\frac{(n-1)}{a}\ \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(a+n)}\ =\frac{(n-1)}{a}\ \frac{a!\ (n-2)!}{(a+n-1)!}$$
$$=\frac{(n-1)!\,(a-1)!}{(a+n-1)!}=\frac{(n-1)!\,1.2.3\ldots(a-1)}{1.2.3\ldots(a-1)a\ (a+1)\ldots(a+n-1)}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1.2.3\ldots\ (n-1)}{a\ (a+1)\ldots(a+n-1)}.\,(1.5\ \mathrm{pts})}$$