مركبات السلسلة الزمنية
Time Series Components

وجدنا سابقًا أن أحد أهداف دراسة السلسلة الزمنية هو وصف الظاهرة موضع الدراسة والتعرف على التغيرات المختلفة التي طرأت عليها خلال الفترة الكلية المتاحة بسبب العوامل (المؤثرات) المختلفة التي تتعرض لها الظاهرة، وفي واقع الأمر يمكن القول إن التغيرات التي تطرأ على الظاهرة من فترة زمنية لأخرى تحدث بسبب أربعة أنواع من العوامل:

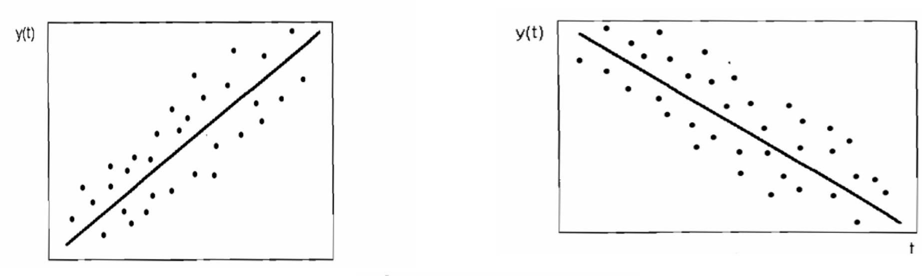
- الاتجاه العام Trend :

عند فحص نمط التغير للظاهرة موضع الدراسة من خلال المنحني الزمني {أومن خلال البيانات) كثيرا ما يلاحظ وجود تغيرات بطيئة وتدريجية على المدى القصير (بالزيادة أو النقصان) وميل عام إلى التزايد على المدى الطويل. يرمز له عادة ب T.

الاتجاه العام هو أهم مركبة من مركبات السلسلة الزمنية ويمثل التغير طويل الأجل في السلسلة، وقياسه هام لأسباب ثلاثة هي:

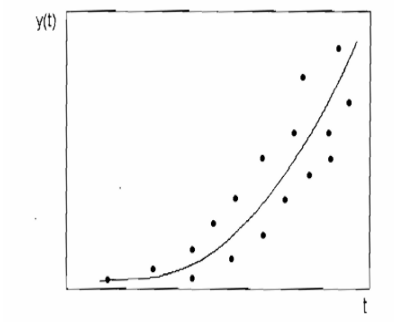
1- يمكننا من معرفة الكيفية التي تتطور بها الظاهرة على المدى الطويل.
2- يساعد في التنبؤ بما سيكون عليه حال القيم المستقبلية.
3- يستخدم في حذف أثر الاتجاه العام من السلسلة ومن ثم يمكن دراسة التغيرات الأخرى بشكل أفضل.

وعادة ما يمكن تقريب الاتجاه العام بواسطة كثيرة حدود أو دالة أسية في الزمن.



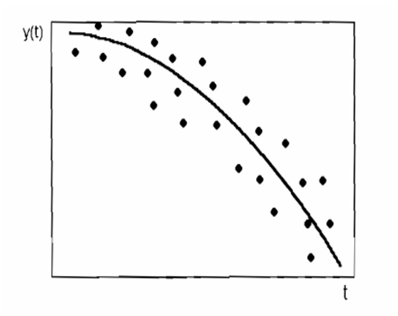
كثيرة الحدود الخطية

$$E(y_t) = f(t) = \beta_0 + \beta_1 t$$



النمو الأسي

$$E(y_t) = f(t) = ce^{rt}$$



كثيرة حدود من الدرجة الثانية

$$E(y_t) = f(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$

- قياس الاتجاه العام

تعتمد الطرق التقليدية في قياس الاتجاه العام على توفيق ما يعرف بمنحنى الاتجاه العام. وتوجد طرق عديدة لتوفيق مثل هذا المنحنى بعضها بدائي يعتمد على النظر والتمهيد باليد والبعض الآخر يعتمد على التمهيد بواسطة المتوسطات للتخلص من التغيرات غير المنتظمة والبعض الثالث يعتمد على تحليل الانحدار والذي يرتبط بالنظرية الإحصائية. وسندرس هنا أهم طريقتين لقياس الاتجاه العام وهما **طريقة الانحدار وطريقة المتوسطات المتحركة**. وسنفترض هنا أن بيانات السلسلة الزمنية تحتوي فقط على مركبة الاتجاه العام.

1- تحليل الانحدار Regression Analysis

أسلوب الانحدار من أهم الطرق التقليدية في تقدير الاتجاه العام. ويعتمد الأسلوب على تحديد معادلة رياضية غير عشوائية $f(t)$ لتمثيل الاتجاه العام، ومن ثم يفترض هذا الأسلوب أن النموذج الملائم لدراسة تطور الظاهرة يمكن كتابته على الشكل:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t \qquad \text{حيث:} \ \varepsilon_t \sim \aleph(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

ويفترض الأسلوب المقترح هنا أن هذه الدالة محددة deterministic أي غير عشوائية. وعادة ما يمكن التعبير عن هذه الدالة عن طريق كثيرة حدود أو صورة أسية،

أما في النموذج ε_t فتمثل التغيرات العشوائية التي تعبر عن التغيرات غير المنتظمة في السلسلة والتي اصطلح على تسميتها بالأخطاء العشوائية.

وتفترض الطرق المقترحة هنا أن هذه المتغيرات غير مرتبطة ولها توقع ثابت يساوي الصفر وتباين ثابت.

ملاحظة:

عدم ارتباط الأخطاء العشوائية يعادل القول بعدم ارتباط مشاهدات السلسلة.

الاتجاه الخطي Linear Trend

تظهر الكثير من الظواهر التي تنشأ في مجالات المعرفة المختلفة اتجاها عاما خطيًا مع الزمن على المدى الطويل، وفي مثل هذه الحالات يمكن كتابة النموذج الملائم على الشكل:

$$y_t = B_0 + B_1 t + \varepsilon_t$$

حيث:

تمثل y_t قيمة الظاهرة عند الفترة الزمنية t ،

الثابتان B_1 و B_0 يمثلان معلمتي النموذج أو معاملي الانحدار.

يكون النموذج ملائما إذا كان مستوى السلسلة يتغير بمقدار ثابت بتغير الزمن فترة زمنية واحدة، وينحصر تقدير الاتجاه العام في تقدير معلمتي النموذج B_1 و B_0 ويذكرنا هذا النموذج على الفور بنموذج الانحدار الخطي البسيط حيث يلعب المتغير $t = 1,2, \dots \dots n$ دور المتغير المستقل، ومن ثم يمكن كتابة النموذج في صورة مصفوفات كما يلي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

حيث Y متجه عمودي من الرتبة n يحتوي على مشاهدات السلسلة:

$$Y = [y_1 \; y_2 \; \dots \dots y_n]^t$$

والمصفوفة X من الرتبة $n \times 2$ ، عناصر عمودها الأول كلها تساوي الواحد الصحيح، وعناصر عمودها الثاني هي القيم المختلفة للوحدات الزمنية وتساوي دائما الأعداد $1,2, \dots \dots n$ بغض النظر عن طبيعة الوحدات الزمنية المستخدمة (سنة -شهر - يوم -....)، أي أن:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{bmatrix}$$

أما المتجه العمودي B فهو من الرتبة 2 ويحتوي على معلمتي النموذج : $B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix}$

والمتجه العمودي ε من الرتبة n ويحتوي على المتغيرات ε_t :

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n\ ]^t$$

تخبرنا دراسة الانحدار أن تقدير المربعات الصغرى لمتجه المعالم هو:

$$\hat{\beta} \ = \ (X^t X)^{-1}\, X^t Y$$

حيث:

$$X^t X = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} t \\ \sum_{t=1}^{n} t & \sum_{t=1}^{n} t^2 \end{bmatrix},\ X^t Y = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} t.\, y_t \end{bmatrix}$$

ويكون متجه القيم المقدرة كالتالي : $\hat{Y} = X\hat{\beta}$

ومتجه البواقي: $e = \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y}$

ومجموع مربعات البواقي

$$SSE \ = \ e^t e \ = \ \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} \left(Y_t - \widehat{Y_t}\right)^2 = Y^t Y - \widehat{\beta^t}\ X^t Y :$$

وتقدير تباين الأخطاء هو: $S^2 = \widehat{\sigma^2} = \frac{SSE}{n-2}$

وتقدير تباين مقدرات المربعات الصغرى هو: $\hat{V}\ (\hat{\beta}) = \ S^2 (X^t X)^{-1} \ = \ S^2 C$

حيث:

$$C = (X^t X)^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

ومن ثم يكون تقدير معادلة الاتجاه العام الخطية:

$$\widehat{y_t} \ = \ \widehat{B_0} \ + \ \widehat{B_1} t \ldots\ldots (*);\ t \ = \ 1,2,\ldots,n$$

ويمكن استخدام معادلة الاتجاه العام المقدرة (*) في تقدير الاتجاه العام للظاهرة لكل الفترات الزمنية المتاحة بالتعويض المتتالي عن قيم $t = 1,2 \dots . n$ فنحصل على القيم الاتجاهية $\widehat{y_1}, \widehat{y_2} \dots . . \widehat{y_n}$. فضلاً عن ذلك يمكن استخدام هذه المعادلة في التنبؤ بما سيكون عليه الاتجاه العام للظاهرة في فترات زمنية غير موجودة ولكنها قريبة من نطاق الزمن المستخدم، فإذا كنا نرغب - على سبيل المثال - في التنبؤ بالاتجاه العام عند الزمن $t = t_0$ نعوض بهذه القيمة في المعادلة المقدرة (*) لنحصل على تنبؤ الاتجاه المناظر $\widehat{y_0}$. كما يمكن إنشاء فترة ثقة للاتجاه العام الحقيقي عند الزمن $t = t_0$ بافتراض اعتيادية normality الأخطاء ε_t كما يلي:

$$\widehat{y_0} \pm t_{\alpha/2,n-2}\, s[1 + x_0^t\, (X^t X)^{-1} x_0]$$

حيث: $x_0^t = [1 \quad t_0]$

ويشير الرمز $t_{\alpha/2,n-2}$ إلى القيمة الجدولية التي نحصل عليها من توزيع t بدرجات حرية $(n-2)$ وتحصر على يمينها مساحة مقدارها $\alpha/2$ حيث يمثل $(1-\alpha)$ درجة الثقة المطلوبة ويمثل الاختبار الخاص بمعنوية المعلمة B_1 أهمية خاصة حيث تحدد هذه المعلمة وجود أو عدم وجود اتجاه خطي في الظاهرة، ويستخدم الإحصاء t المعرف بالصيغة التالية للحكم على معنوية هذه المعلمة:

$$t = \widehat{B_1}/S\sqrt{C_{22}}$$

والذي يتبع توزيع بدرجات حرية $(n-2)$ بافتراض صحة الفرض العدمي $B_1 = 0$, ومن ثم نرفض الفرض العدمي إذا كان $|t| > t_{\alpha/2}$ وفي هذه الحالة نقر بوجود اتجاه خطي في الظاهرة. ومن ناحية أخرى إذا لم يتم رفض الفرض العدمي فإن هذا يعني عدم وجود اتجاه خطي في الظاهرة ويتم توفيق النموذج الآتي بدلاً من النموذج الخطي

$$y_t = B_0 + \varepsilon_t \dots .(**)$$

ويمكن في هذه الحالة إثبات أن $\widehat{y_t} = \widehat{B_0} = \bar{y}$