Université de Médéa	**Contrôle continu de S_1**	Niveau: Master 1
Département: MI	**Analyse fonctionnelle+Théorie spectrale des opérateurs**	Année: 2023/2024

Exercice 01 (15 points) ☆

(Analyse fonctionnelle)

(I) Soit E un espace de Banach.
1)- Donner la définition de la convergence faible d'une suite.
- Donner la définition de la convergence $*$-faible d'une suite.
- Quelle est la différence entre les deux convergences (faible et $*$-faible)?
- Donner la définition de la convergence forte d'une suite.
- Quelle est la différence entre les deux convergences (faible et forte).

(II) On considère l'espace de Hilbert l^2 sur $\mathbb{C}$ tel que

$$l^2 = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\Big\}.$$

muni du produit scalaire:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n},$$

pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...), y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in l^2$,
et la norme induite:

$$\| x \| = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} | x_n |^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit l'opérateur $T_n : l^2 \to \mathbb{C}$ défini par:

$$T_n x = (T_n x)_n = x_n.$$

1. Montrer que T_n est une forme linéaire continue sur l^2 et calculer sa norme $\|T_n\|$.
2. Montrer que la suite (T_n) converge au sens de la topologie $*$-faible, vers 0.
3. La suite (T_n) converge-t-elle fortement vers 0 ?

Exercice 02 (15 points) ☆☆

(Théorie spectrale des opérateurs)

On considère un espace H de Hilbert sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $\langle ., .\rangle$ et soit $T : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire continu et auto-adjoint c'est à dire que $T = T^*$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $\alpha = \Re e(\lambda)$, $\beta = \Im m(\lambda)$ et $\gamma =| \beta |$ et on suppose que $\gamma \neq 0$.
1) Montrer que $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.
2) Calculer $\langle(\lambda - T)x, x\rangle$.
3) En déduire:
a) $\Big|\langle(\lambda - T)x, x\rangle\Big| \geq \gamma \| x \|^2$.
b) $\| (\lambda - T)x \| \geq \gamma \| x \|$.
c) L'opérateur $\lambda - T$ est injectif.

Corrigé

Exercice 1:
I) 1) $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle,\ \forall f \in E'$.

$f_n \rightharpoonup f \Longleftrightarrow \langle f_n, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle,\ \forall x \in E$.

- Les deux convergences faible et $*$-faible concident lorsque E est un espace de Hilbert.

$x_n \longrightarrow x$ fortement $\Longleftrightarrow \parallel x_n - x \parallel_E \longrightarrow 0$.

$f_n \longrightarrow f$ fortement $\Longleftrightarrow \parallel f_n - f \parallel_{E'} \longrightarrow 0$.

- la convergence forte $\Longrightarrow$ toujours la convergence faible mais la réciproque est fausse sauf si $\dim(E) < +\infty$.
1) La linarité de T_n est claire.
La continuité de T_n.
Soit $x \in l^2$. On a:
$\parallel T_n x \parallel^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mid (T_n x) \mid^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mid x_n \mid^2 = \parallel x \parallel^2$.
Donc,
$\parallel T_n x \parallel = \parallel x \parallel$.
Par conséquent l'opérateur T_n est une isométrie et on conclut que $\parallel T_n \parallel = 1$.
2) Montrons que $T_n \rightharpoonup 0$.
On a:
$T_n \rightharpoonup 0 \Longleftrightarrow \langle T_n, x \rangle \longrightarrow \langle x, 0 \rangle = 0,\ \forall x \in l^2$.
Soit $x \in l^2$. On a:
$\langle T_n, x \rangle = T_n x = (T_n x)_n = x_n$.
Comme la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mid x_n \mid^2$ est convergente, alors son terme général tend vers 0, donc $x_n \longrightarrow 0$. D'où le résultat.
2) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas fortement vers 0 car $\parallel T_n \parallel = 1$.

Exercice 2:
1) On a:
$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle x, Tx \rangle} = \overline{\langle T^* x, x \rangle} = \overline{\langle Tx, x \rangle}$ (car $T = T^*$).
Donc $\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$, ce qui signifie que $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.
2) $\langle (\lambda - T)x, x \rangle = \langle \lambda x - Tx, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle - \langle Tx, x \rangle = \langle (\alpha + i\beta)x, x \rangle - \langle Tx, x \rangle = \langle \alpha x, x \rangle + \langle i\beta x, x \rangle - \langle Tx, x \rangle = \alpha \langle x, x \rangle + i\beta \langle x, x \rangle - \langle Tx, x \rangle = \alpha \parallel x \parallel^2 - \langle Tx, x \rangle + i\beta \parallel x \parallel^2$.
Donc

$$\langle (\lambda - T)x, x \rangle = \alpha \parallel x \parallel^2 - \langle Tx, x \rangle + i\beta \parallel x \parallel^2$$

On remarque que :
$\Re e\Big[\langle (\lambda - T)x, x \rangle\Big] = \alpha \parallel x \parallel^2 - \langle Tx, x \rangle$, et
$\Im m\Big[\langle (\lambda - T)x, x \rangle\Big] = \beta \parallel x \parallel^2$.
3) Déduire:
a) On sait que si $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$, alors,

$$\mid z \mid \geq x \text{ et } \mid z \mid \geq y.$$

Donc,

$$\Big|\langle(\lambda - T)x, x\rangle\Big| \geq \gamma \parallel x \parallel^2 . \tag{1}$$

b) Utilisons Cauchy Schwarz:

$\Big|\langle(\lambda - T)x, x\rangle\Big| \leq\parallel (\lambda - T)x \parallel \parallel x \parallel$.
En vertu de (1) on en déduit que:
$\gamma \parallel x \parallel^2\leq\parallel (\lambda - T)x \parallel \parallel x \parallel$.
On simplifie $\parallel x \parallel$ dans les deux membres on trouve

$$\parallel (\lambda - T)x \parallel\geq \gamma \parallel x \parallel . \tag{2}$$

c) En déduire que $\lambda - T$ est injectif.
Comme l'opérateur $\lambda - T$ est linéaire, alors il suffit de montrer que:
$(\lambda - T)x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \forall x \in H$.
Soit $x \in H$.
On a:
Si $(\lambda - T)x = 0$, alors d'après (2) on conclut que $\gamma \parallel x \parallel\leq 0$, et comme $\gamma \neq 0$, alors $\parallel x \parallel\leq 0$. Donc $\parallel x \parallel= 0$.
D'où $x = 0$.