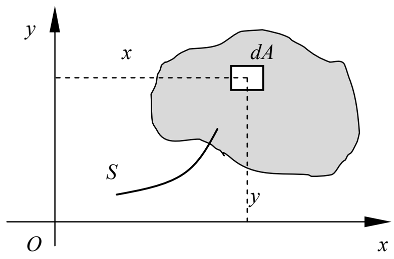
Chapitre 1

Caractéristiques géométriques des sections droites

1.1. Moment Statique d'une Section - Centre de Gravité

Soit dA une surface élémentaire d'une section droite (S). x,y sont les coordonnées de cette surface par rapport au système d'axes (O,x,y).



Le moment statique S_x de la section (S) par rapport à l'axe Ox est donné par la relation :

$$S_x = \int_A y dA$$

De même, le moment statique de la section (S) par rapport à l'axe O_y est défini par la relation :

$$S_y = \int_A x dA$$

Le centre de gravité de la section (S) par rapport à (O,x,y) est défini par les coordonnées x_G et y_G comme suit :

$$x_G = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} \qquad y_G = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

Si la section (S) est composée par des éléments de géométrie simple

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_{Gi} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{y}_{Gi} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} == \frac{S_x}{A}$$

<u>Remarques</u> :

- Le moment statique est une intégrale d'ordre 1, il peut être positif, négatif ou nul.
- Le moment statique d'une section par rapport à un axe central (axe passant par le centre de gravité) est toujours nul.

1.2. Moment d'Inertie d'une Section – Produit d'inertie

Le moment d'inertie I_{Ox} de la section (S) par rapport à l'axe Ox est donné par la relation :

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

De même, le moment d'inertie de la section (S) par rapport à l'axe Oy est défini par la relation :

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

On défini le produit d'inertie de (S) par rapport au système d'axes (O,x,y) par :

$$I_{xy} = \int_A xydA$$

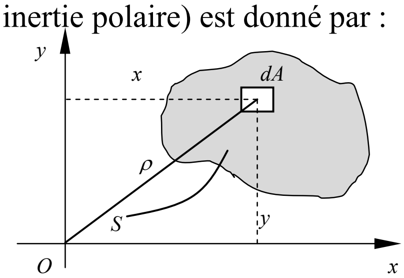
<u>Remarques</u> :

- Le moment d'inertie est une intégrale d'ordre 2, il ne peut pas être négatif ou nul.
- Le produit d'inertie est une intégrale d'ordre 1, il peut être positif, négatif ou nul.
- Le produit d'inertie d'une section par rapport à un axe central (axe passant par le centre de gravité) est toujours nul.

1.3. Moment d'inertie polaire

Le moment d'inertie de la section droite S par rapport au point O (moment d'inertie polaire) est donné par :

$$I_O = \int_A (x^2 + y^2)dA = \int_A \rho^2 dA = I_y + I_x$$

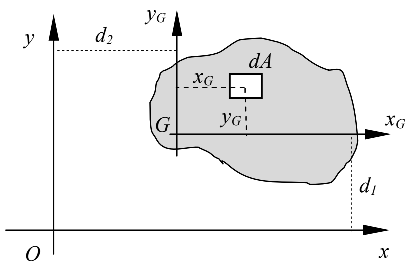


1.4. Théorème des axes parallèles

Soient les deux systèmes de référence (O, x, y) et (O, x_G, y_G) dont la section S est rapportée :

(O, x, y) est parallèle à (O, x_G, y_G)

(O, x_G, y_G) est un système d'axes central.



On écrit ;

Moment statique par rapport à x S_x=0 (y_G axe central)

$$I_x = \int_A (y_G + d_1)^2 dA = \int_A y_G^2 dA + 2d_1 \cancel{\int_A y_G dA} + d_1^2 \int_A dA$$

$$I_x = I_{x_G} + Ad_1^2$$

$$I_y = I_{y_G} + Ad_2^2$$

Moment statique par rapport à y S_y=0 (x_G axe central)

Moment statique par rapport à x S_x=0 (y_G axe central)

$$I_{xy} = \int_A (x_G + d_2)(y_G + d_1)dA$$

$$= \int_A x_G y_G dA + d_1 \cancel{\int_A x_G dA} + d_2 \cancel{\int_A y_G dA} + d_1 d_2 \int_A dA$$

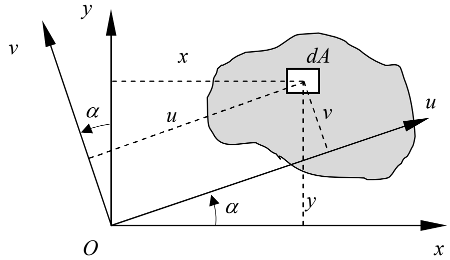
$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + Ad_1 d_2$$

1.5. Rotation des axes

Soient les deux systèmes de référence (O, x, y) et (O, u, v) dont la section S est rapportée :

(O, u, v) tourne autour de l'axe z par rapport à (O, x, y)

α est l'angle que fait l'axe x avec l'axe u



On écrit :

$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad v = y\cos\alpha - x\sin\alpha$

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA$$

$$= \cos^2\alpha \int_A y^2 dA + \sin^2\alpha \int_A x^2 dA - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A xy dA$$

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dA = (I_x - I_y)\sin\alpha\cos\alpha + I_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha$$

I_u et I_v admettent des valeurs extrêmes (max ou min) si I_{uv} est nul, c.à.d :

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

D'ou

$$I_{\frac{max}{min}} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}$$

- Dans ce cas, les moments d'inertie I_u et I_v s'appellent moment principaux d'inertie et les axes u et v s'appellent axes principaux.
- Dans le cas où u et v passent par le centre de gravité de la section, I_u et I_v s'appellent moment principaux centraux d'inertie.