Cours de probabilité Avancée

Diffalah LAISSAOUI

Université de Médéa
Faculté des sciences
Département de mathématiques et Informatique

L3 Maths

Mars 2022

Introduction aux probabilités

Sur un ensemble de N valeurs ou tirages, on peut définir les concepts suivants :

Fréquence :

Definition

si l'événement A se produit $N(A)$ fois sur les N, la "fréquence de l'événement A" est $\frac{N(A)}{N}$

Probabilité :

Definition

quand le nombre de tirages augmente, on passe de la statistique à la probabilité, on remplace la fréquence par la probabilité de l'événement i, $p(i)$. La somme des N valeurs de $p(i)$ vaut 1 :$\sum_{i=1}^{N} p(i) = 1$.

Remarque

Les liens entre probabilité et statistique sont forts. Les statistiques partent de la réalité d'une population et cherchent à la modéliser avec des lois mathématiques pour l'expliquer et/ou extrapoler son comportement à une autre population. Les probabilités définissent les lois mathématiques auxquelles obéissent des expériences régies par le hasard.

Definition

on considère le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou Ω : espace fondamental ou bien l'univers et $\mathcal{F}$ est appelé tribu ou σ-algèbre. les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les événements. La mesure P est appelée probabilité ou, mieux, mesure de probabilité, et pour un événement A de $\mathcal{F}$, le nombre réel $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A.

Definition

1. la tribu $\mathcal{F}$ vérifie les propriété suivante : $\Omega \in \mathcal{F}$

Remarque

Si on remplace la propriété 3 par la propriété suivante si

$$A_1, A_2, \ldots.., A_n \in \mathcal{F} \text{ alors } \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F} \text{ alors } \mathcal{F} \text{ ne sera qu'une algèbre.}$$

Definition

1. la tribu $\mathcal{F}$ vérifie les propriété suivante : $\Omega \in \mathcal{F}$
2. si $A \in \mathcal{F}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{F}$,

Remarque

Si on remplace la propriété 3 par la propriété suivante si $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ *alors* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ *alors* $\mathcal{F}$ *ne sera qu'une algèbre.*

Definition

1. la tribu $\mathcal{F}$ vérifie les propriété suivante : $\Omega \in \mathcal{F}$
2. si $A \in \mathcal{F}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{F}$,
3. si $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Remarque

Si on remplace la propriété 3 par la propriété suivante si $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ ne sera qu'une algèbre.

Example

1. Soit Ω un espace q.c.q : $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ $\sigma-$algèbre triviale ;

Definition

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ ainsi défini est appelé espace probabilisable.

Example

1. Soit Ω un espace q.c.q : $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ $\sigma-$algèbre triviale ;
2. Ω espace q.c.q et $A \subset \Omega$ alors $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$ $\sigma-$algèbre engendré par A;

Definition

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ ainsi défini est appelé espace probabilisable.

Example

1. Soit Ω un espace q.c.q : $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ $\sigma-$algèbre triviale ;
2. Ω espace q.c.q et $A \subset \Omega$ alors $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$ $\sigma-$algèbre engendré par A;
3. Ω espace q.c.q et $P(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω alors $\mathcal{F} = P(\Omega)$ c'est une $\sigma-$algèbre (la plus grande).

Definition

Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ ainsi défini est appelé espace probabilisable.

Definition

1. On appelle probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application

$$P : \mathcal{F} \to [0.1]$$

et vérifient les conditions suivantes : $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$.

Definition

1. On appelle probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0.1]$$

et vérifient les conditions suivantes : $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$.

2. $P(\Omega) = 1$.

Definition

1. On appelle probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ une application
$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0.1]$$
et vérifient les conditions suivantes : $P(A) \geq 0 \; \forall A \in \mathcal{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ si $A_i \cap A_j = \emptyset \; (i \neq j)$. Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appelé espace de probabilité.

proprietes des espaces de probabilité

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$

proprietes des espaces de probabilité

1. $\emptyset \in F$
2. Si $A_1, A_2 \in F$ alors $A_1 \cup A_2 \in F$

proprietes des espaces de probabilité

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ alors $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

proprietes des espaces de probabilité

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ alors $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \ldots.., A_n, \ldots.. \in \mathcal{F}$ alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

proprietes des espaces de probabilité

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ alors $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. $P(\emptyset) = 0$.

proprietes des espaces de probabilité

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ alors $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. $P(\emptyset) = 0$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in \mathcal{F}$.

proprietes des espaces de probabilité

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ alors $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \ldots.., A_n, \ldots.. \in \mathcal{F}$ alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. $P(\emptyset) = 0$.
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in \mathcal{F}$.
7. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \forall A, B, C \in \mathcal{F}$.

1. $$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots.. + (-1)^{k+1} \sum_{k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots. \cap A_{i_k}) + \ldots. + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n}).$$

1. $$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots.. + (-1)^{k+1} \sum_{k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots. \cap A_{i_k}) + \ldots. + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n}).$$
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ si $A_1 \subset A_2$ alors P$(A_1) \leq P(A_2)$.

1. $$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \dots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n}).$$
2. $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ si $A_1 \subset A_2$ alors P$(A_1) \leq P(A_2)$.
3. $\forall A \in \mathcal{F}$, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Example

Soit une population de n personnes, m de ces personnes soit males, r personnes on les yeux bleux dont q sont males, on selctionne un male au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il les yeux bleus ?

Solution

Soit les évènements A" population male" et B" yeux bleus". Dans cet exemple une information est donnée a priori (choix du male) c-a-d condition sur l'information donné, on fait des calculs sur le nouvel espace fondamental. $A \cap B =$*"male aux yeux bleux",* $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(A \cap B) = \frac{q}{n}$, *donc* $P($*la personne choisie ait les yeux bleux sachant que c'est un garçon*$) = \frac{\frac{q}{n}}{\frac{m}{n}} = P(B/A)$.

Definition

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et soit B un évènement tel que $P(B) > 0$, la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est donnée par $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$P(A/B) = P_B(A)$.

Remarque

- $0 \leq P(A/B) \leq 1$.

Exemple

Deux dés sont jettes, on observe le 1er dé N° 3 apparait. Quelle est la probabilité pour que la somme des deux soit égale à 8.

Definition

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et soit B un évènement tel que $P(B) > 0$, la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est donnée par $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$P(A/B) = P_B(A)$.

Remarque

- $0 \leq P(A/B) \leq 1$.
- $P(A/B)$ *est une probabilité sur l'espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exemple

Deux dés sont jettes, on observe le 1er dé N° 3 apparait. Quelle est la probabilité pour que la somme des deux soit égale à 8.

Exemple

On jette une pièce de monnaie, l'apparition de face nous permet de tirer une bille d'une boite N° 1 qui contient une bille de 1000 DA ; 9 bille de 1 DA. L'apparition de pile nous permet de tirer une bille d'une boite N° 2 qui contient 5 bille de 50 DA, 5 bille de 1 DA. L'évènement intéréssant A=" gagner 1000 DA".

Remarque

1. $P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A).$

Exemple

On jette une pièce de monnaie, l'apparition de face nous permet de tirer une bille d'une boite N° 1 qui contient une bille de 1000 DA ; 9 bille de 1 DA. L'apparition de pile nous permet de tirer une bille d'une boite N° 2 qui contient 5 bille de 50 DA, 5 bille de 1 DA. L'évènement intéréssant A=" gagner 1000 DA".

Remarque

1. $P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)$.
2. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$.

Exemple

On jette une pièce de monnaie, l'apparition de face nous permet de tirer une bille d'une boite N° 1 qui contient une bille de 1000 DA ; 9 bille de 1 DA. L'apparition de pile nous permet de tirer une bille d'une boite N° 2 qui contient 5 bille de 50 DA, 5 bille de 1 DA. L'évènement intéréssant A=" gagner 1000 DA".

Remarque

1. $P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = P(B/A).P(A)$.
2. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B/A)P(C/A \cap B)$.
3. $P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2).........P(A_n/A_1 \cap ...... \cap A_{n-1})$.

Formule de probabiltés totale

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et soit $A_1, ...A_{n-1}, A_n$ un système complet d'évènement de Ω tel que $P(A_i) > 0$ $\forall i = 1.....n$ et soit $A \in \mathcal{F}$ quelconque on a

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i) = \cup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$$

$A \cap A_i$ sont 2 à 2 incompatibles

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(A/A_i).$$

Exemple

Trois machines M_1, M_2 et M_3 produisent 30% , 45% et 25% des pièces de production ; le pourcentage des pieces défectueuses est 2% pour M_1, 3% pour M_2 et 1% pour M_3. Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard de la production soit défectueuse.

Formule de Bayes
Soit $(A_i)_{i=1\ldots n}$ un système complet d'évènement, $\forall A \in \mathcal{F}$ on se propose de calculer $P(A_i/A)$. A est réalise

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i) = \cup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$$

donc

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap A_i)$$

et comme

$$P(A \cap A_i) = P(A)P(A_i/A) = P(A_i)P(A/A_i)$$

d'ou

$$\begin{aligned} P(A_i/A) &= \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i)} \end{aligned}$$

Exemple

Trois machines M_1, M_2 et M_3 produisent 30% , 45% et 25% des pièces de production ; le pourcentage des pieces défectueuses est 2% pour M_1, 3% pour M_2 et 1% pour M_3. Calculer la probabilité que la pièce défectueuse provienne de la machine M_i $1 \leq i \leq 3$.

Evènements indépendants

Si la réalisation d'un évènement A ne change pas les chances de réalisation d'un évènement B on dit que A et B sont indépendants et on écrit

$$P(A/B) = P(A).$$

par conséquent

$$P(B/A) = P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

d'ou

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Definition

A et $B \in \mathcal{F}$ sont indépendants si $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Definition

Si A et $B \in \mathcal{F}$ sont incompatible alors $A \cap B = \emptyset$

Exemple

une carte sélectionnée au hasard d'un jeu de 52 carte, soit les évènements $A = \{as\}$ et $B = \{pique\}$ A et B sont ils indépendants ?

Exemple

On jette une pièce de monnaie deux fois, soit les évènements $A = \{1ere\ face\}$ *et* $B = \{2eme\ pile\}$ *A et B sont ils indépendants ?*

Exemple

On jette deux dés, soit les évènements $A = \{la\ somme = 6\}$ *et* $B = \{1ere\ dé\ donne\ 4\}$ *A et B sont ils indépendants ?*

Exemple

1/ Montrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ *et B sont aussi ainsi que A et* $\overline{B}$, $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$*.2/ Calculer* $P(A \cap \overline{B})$ *en fonction de* $P(A)$ *et* $P(A \cap B)$*.3/ Montrer que si* $P(B/\overline{A}) = P(B/A)$ *alors A et B sont indépendants.*