Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès Médéa

Faculté de Technologie

Cours Physique 3 filières (*Génie civil, Génie Mécanique, Génie Climatique, Génie des Procédés***,** Hygiène et Sécurité industrielle)

Ondes et vibrations mécaniques

L2 Tronc Commun 2020/2021

Dr AMARI Malika

Fiche du cours

Crédits**:04**

Coefficient**:02**

Volume horaire hebdomadaire **: Cours: 01h30, TD: 01h30**

Volume Horaire Semestriel (15 semaines)**: 45h**

Travail Complémentaire en Consultation (15 semaines)**: 55h30**

Mode d'évaluation: Contrôle Continu **40%,** Examen **60%**

Objectifs de l'enseignement

Initier l'étudiant aux phénomènes de vibrations mécaniques restreintes aux oscillations de faible amplitude pour 1 ou 2 degrés de liberté ainsi qu'à l'étude de la propagation des ondes mécaniques.

Connaissances préalables recommandées Mathématiques2, Physique1et Physique 2

Contenu de la matière

Partie A : Vibrations

Chapitre 1 : Introduction aux équations de Lagrange 2 semaines

1.1 Equations de Lagrange pour une particule

1.1.1 Equations de Lagrange

1.1.2 Cas des systèmes conservatifs

1.1.3 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

1.1.4 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

1.2 Système à plusieurs degrés de liberté.

Chapitre 2 : Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté 2 semaines

2.1 Oscillations non amorties

2.2 Oscillations libres des systèmes amortis

Chapitre 3 : Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté 1 semaine

3.1 Équation différentielle

3.2 Système masse-ressort-amortisseur

3.3 Solution de l'équation différentielle

3.3.1 Excitation harmonique

3.3.2 Excitation périodique

3.4 Impédance mécanique

Chapitre 4 : Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté 1 semaine

4.1 Introduction

4.2 Systèmes à deux degrés de liberté

Chapitre 5 : Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté 2 semaines

5.1 Equations de Lagrange

5.2 Système masses-ressorts-amortisseurs

5.3 Impédance

5.4 Applications

5.5 Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté

Partie B : Ondes

Chapitre 1 : Phénomènes de propagation à une dimension 2 semaines

1.1 Généralités et définitions de base

1.2 Equation de propagation

1.3 Solution de l'équation de propagation

1.4 Onde progressive sinusoïdale

1.5 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales

Chapitre 2 : Cordes vibrantes **2 semaines**

2.1 Equation des ondes

2.2 Ondes progressives harmoniques

2.3 Oscillations libres d'une corde de longueur finie

2.4 Réflexion et transmission

Chapitre 3 : Ondes acoustiques dans les fluides **1 semaines**

3.1 Equation d'onde

3.2 Vitesse du son

3.3 Onde progressive sinusoïdale

3.4 Réflexion-Transmission

Chapitre 4 : Ondes électromagnétiques **2 semaines**

4.1 Equation d'onde

4.2 Réflexion-Transmission

4.3 Différents types d'ondes électromagnétiques

Références bibliographiques:

1. H. Djelouah ; Vibrations et Ondes Mécaniques – Cours & Exercices (site de l'université de l'USTHB : perso.usthb.dz/~hdjelouah/Coursvom.html)
2. T. Becherrawy ; Vibrations, ondes et optique ; Hermes science Lavoisier, 2010
3. J. Brac ; Propagation d'ondes acoustiques et élastiques ; Hermès science Publ. Lavoisier, 2003.
4. R. Lefort ; Ondes et Vibrations ; Dunod, 2017
5. J. Bruneaux ; Vibrations, ondes ; Ellipses, 2008.
6. J.-P. Perez, R. Carles, R. Fleckinger ; Electromagnétisme Fondements et Applications, Ed. Dunod, 2011.
7. H. Djelouah ; Electromagnétisme ; Office des Publications Universitaires, 2011.

Fiche technique du cours

Ce document est destiné aux étudiants de deuxième année des filières scientifiques techniques des universités et écoles d'ingénieurs d'Algérie répondant au programme officiel du module « Vibrations et Ondes mécaniques » enseignés au semestre trois (3) des filières Sciences et techniques et Sciences de la matière.

Ce manuscrit contient cinq chapitres. La première porte sur l'utilisation du formalisme de Lagrange pour décrire les oscillations des systèmes physiques. L'étude des oscillations linéaires (de faible amplitude) libres des systèmes à un degré de liberté est présentée dans le chapitre deux. Le troisième chapitre traite le mouvement amorti qui prend en compte les forces de frottement de type visqueux proportionnelles à la vitesse du mobile.
La notion de résonance consacrée aux oscillations forcées est présentée au quatrième chapitre. Le cinquième chapitre traite les vibrations de systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Chapitre1: Généralités sur les vibrations des systèmes mécaniques

1.1. Définitions

-La vibration est un phénomène physique oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre. Exemple: le mouvement d'une balançoire, les ailes d'un moustique vibrent à un rythme d'environ 100 battements par seconde, …etc.

-Le type de mouvement périodique se nomme oscillation ou mouvement oscillatoire.

-La vibration d'un système peut-être libre ou forcée.

-Un oscillateur est dit libre s'il oscille sans interventions extérieur pendant son mouvement.

-On appelle mouvement périodique un mouvement qui se répète dans une durée T; la durée T est appelée période.

-Tout système mécanique, incluant les machines industrielles les plus complexes, peut-être représenté par des modèles simples formés de ressort, d'amortisseur et de masse. - Un cycle est une suite non interrompue de mouvements ou de phénomènes qui se répètent toujours dans le même ordre. Exemple: le cycle à quatre temps d'un moteur à explosion. Ce cycle complet comprend quatre étapes qui se répètent (admission, compression, explosion, échappement).

-Un oscillateur est dit forcé, s'il oscille avec interventions extérieurs (forces extérieures)

1.2. Degrés de liberté et Contraintes

-Le nombre de degrés de liberté d'un système physique est égal au nombre de coordonnées linéairement indépendantes nécessaire pour le décrire.

-Les coordonnées indépendantes sont appelées coordonnées généralisées.

-Une contrainte est une relation mathématique entres les coordonnées.

Exemple 1

Particule libre se déplace librement dans l'espace, la particule est libre donc, il n'y a pas de conditions sur son mouvement (ou pas de contraintes), dans ce cas il est indispensable de connaitre simultanément ses trois coordonnées x, y et z pour qu'on puisse la repérer, ces variables sont appelées **coordonnées généralisées.**

Exemple 2

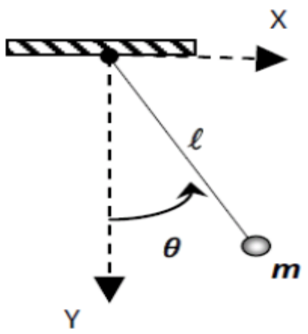
Pendule de longueur *l*, mouvant dans le plan (x y). Ses coordonnées obéissent d'un côté à la contrainte :

$x^2 + y^2 = l^2$ (***l*** étant la longueur du fil, ***l*** est une constante car le fil est inextensible) et de l'autre côté, la contrainte z = 0 (car le mouvement est dans le plan (x y).

On peut constater que *x* et *y* ne sont pas indépendants, à partir d'une valeur de *x,* on peut déduire les valeurs y et z.

$y^2 = l^2 + x^2$ ***et*** $z = 0$

Une seule coordonnée nous suffit de repérer la particule, donc le système à un degré de liberté et la coordonnée généralisée qui convient ce système est **θ**.



Remarques

-En choisissant d'utiliser les coordonnées généralisées (notées q) dans nos calculs, nous sommes sûrs de travailler avec des variables indépendantes.

-Les dérivés des coordonnées généralisées par rapport au temps donnent ce qu'on appelle les vitesses généralisées.

Cas général

-Pour N particules; la règle suivante est toujours valable:

Le nombre de degrés de liberté = 3* × *Le nombre de particules – le nombre de contraintes

$NDL = 3 \times N - NC$

Le nombre 3 représente le nombre des coordonnées nécessaire dans un espace à trois dimensions pour repérer chaque particule (dans un repère cartésienne, on parle des coordonnées x, y et z)

Pour les corps solides, la règle suivante est toujours valable.

Le nombre de degrés de liberté = 6* × *Le nombre de particules – le nombre de contraintes.

$NDL = 6 \times N - NC$

Le nombre 6 représente le nombre de coordonnées nécessaires dans un espace à trois dimensions pour repérer chaque point de corps solide (3 coordonnées de déplacement (x_{cg}, y_{cg}, z_{cg}) pour repérer son centre de gravité, et trois angles de rotation autour trois axes passant par son centre de gravité pour repérer la position de chaque point de corps

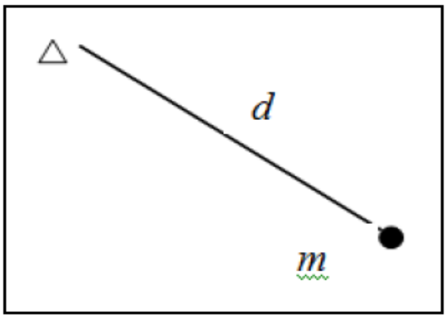
1.3. Energie cinétique d'un point matériel

Un point matériel peut se déplacer sur une ligne droite, et donc la coordonnée q décrit un déplacement. Dans ce cas l'énergie cinétique d'un point matériel s'écrit sous la forme suivante:

$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$

Si par contre, le point matériel fait une rotation autour d'un axe fixe, la coordonnée q décrit un angle de rotation, et par conséquent l'énergie cinétique s'écrit:

$T = \frac{1}{2}md^2\dot{q}^2$



La formule md^2 possède la dimension d'un ***moment d'inertie. C'est le moment d'inertie d'une masse ponctuelle qui se trouve à une distance d de l'axe de rotation.***

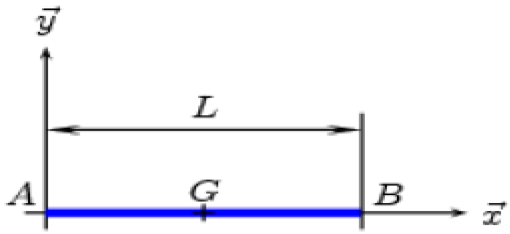
Exemple *: l'énergie cinétique de pendule simple*

$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

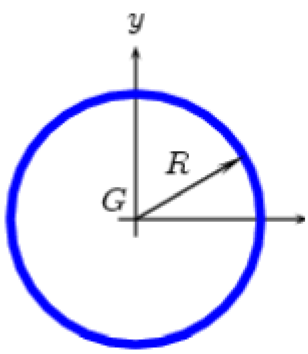
1.4. Moment d'inertie de quelques corps solide

a) Tige de longueur L et de masse m

$I_{A_x} = I_{G_x} = 0$ $\quad I_{A_y} = I_{G_z} = m\frac{L^2}{3}$ $\quad I_{G_y} = I_{G_z} = m\frac{L^2}{12}$

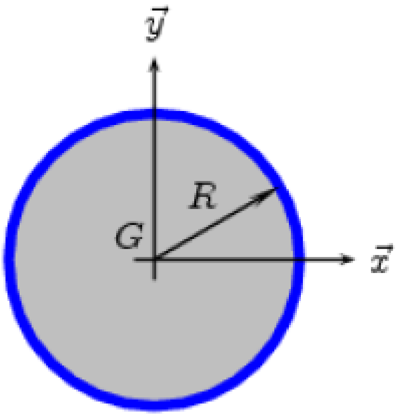


b) Cercle de rayon R et de masse m



$I_{G_x} = I_{G_y} = m\frac{R^2}{2}$ $\quad I_{G_z} = mR^2$

c) Disque de rayon R et de masse m et cylindre pleine



$I_{G_x} = I_{G_y} = m\frac{R^2}{4}$ $\quad\quad I_{G_z} = m\frac{R^2}{2}$

d) Sphère creuse de rayon R et de masse m

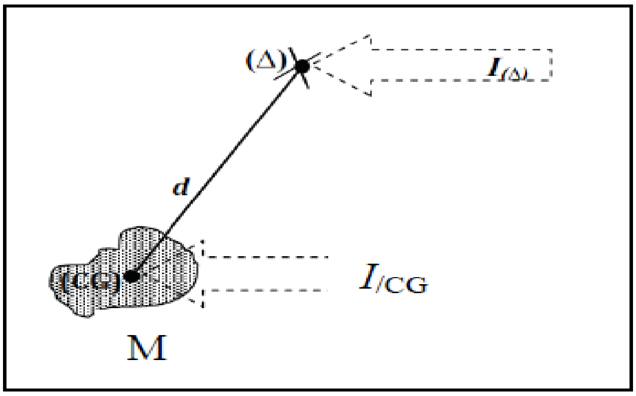
$I_{G_x} = I_{G_y} = I_{G_z} = \frac{2}{3}\, mR^2$

e) Sphère pleine de rayon R et de masse m

$I_{G_x} = I_{G_y} = I_{G_z} = \frac{2}{3}\, mR^2$

1.5.Changement d'axe de rotation (Théorème de Huygens ou théorème des axes parallèles)

On passe du moment d'inertie autour d'une droite au moment d'inertie autour d'un axe parallèle mais passant par le centre de gravité *G* du solide (figure), et inversement, par la relation:



$I = I_{/CG} + md^2$

Exemple : *moment d'inertie d'une tige de langueur L et de masse M par rapport à un axe passant par son extrémité.*

$I_{/CG} = \frac{1}{3}\, m\, L^2$

1.6.Energie cinétique d'un corps solide

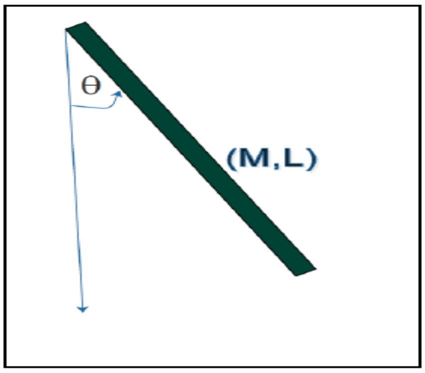
a) Méthode directe

On peut se servir d'un calcul direct pour trouver l'expression de l'énergie totale d'un système.

$$T = \frac{1}{2} I_{/\Delta} \dot{q}^2$$

$I_{/\Delta}$ est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe réel de rotation.

Exemple : Calculer l'énergie cinétique d'un pendule formé d'une barre de langueur L et de masse homogène M tournant autour un axe passant par son extrémité



$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} M L^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} M L^2 \dot{\theta}^2$$

b) Méthode indirecte

En partant de la relation précédente de l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} I_{/\Delta} \dot{q}^2$$

En substituant le moment d'inertie par son expression dans l'expression de l'énergie cinétique, on obtient.

$$T = \frac{1}{2}(I_{CG} + md^2)\dot{q}^2 = \frac{1}{2} I_{CG} \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\, md^2 \dot{q}^2$$

La vitesse linéaire du centre de gravité est donnée par $v_{cg} = d\dot{q}$

Nous obtenons donc

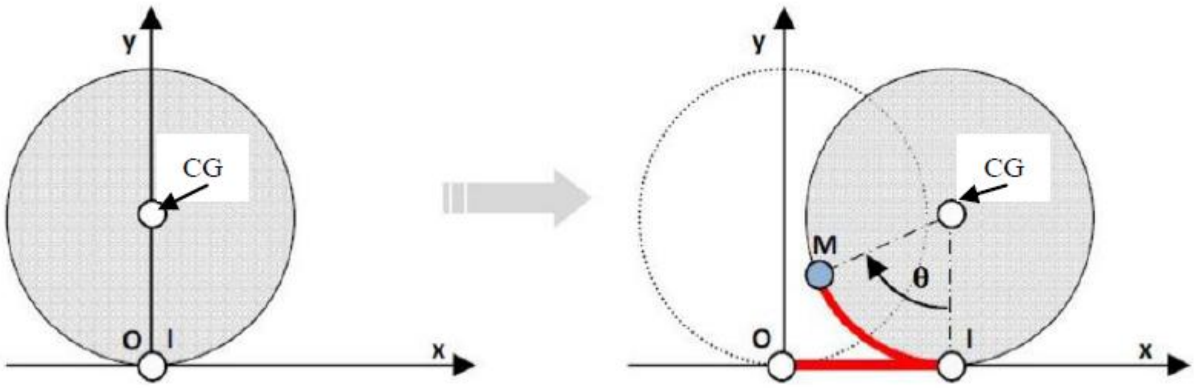
$$T = \frac{1}{2} m\, {v_{cg}}^2 + \frac{1}{2} I_{CG} \dot{q}^2 = T_{tran} + T_{rot}$$

$T_{tran} = \frac{1}{2} m\, {v_{cg}}^2$ est l'énergie cinétique de translation pure du centre de gravité.

$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{CG} \dot{q}^2$ est l'énergie cinétique de rotation pure autour du centre de gravité.

Donc l'énergie cinétique totale d'un système de points matériels est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation du centre de gravité T_{tran} *et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre de gravité* T_{rot}.

Exemple : Énergie cinétique d'un disque qui se déplace sans glissement sur une ligne droite.



$$T = T_{tran} + T_{Rot}$$

La condition de roulement sans glissement nous donne

$x = \overline{OI} = \widehat{IM} = R\theta$

et la vitesse du centre de gravité

$v_{cg} = \frac{dx}{dt} = R\dot{\theta}$

$T_{tran} = \frac{1}{2} M v_{cg}^2 = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2$

Et $T_{rot} = \frac{1}{2} I_{/cg}\, \dot{\theta}^2$

Avec $I_{/cg}$ *est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe qui passe par son centre de gravité.*

$I_{/cg} = \frac{1}{2} M R^2$

Donc $T = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$

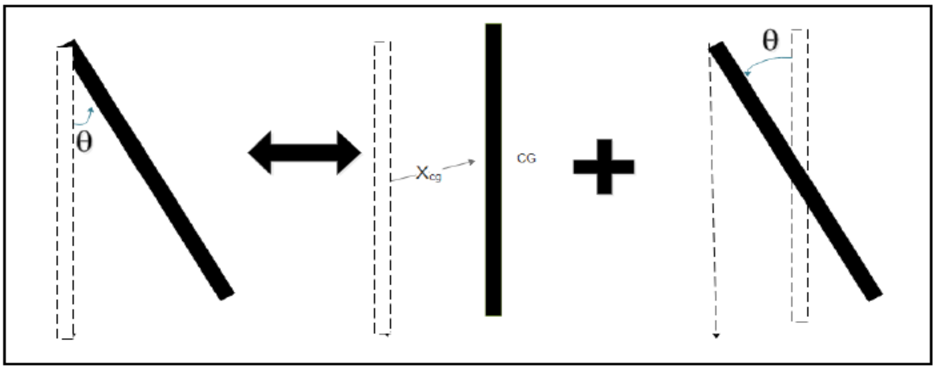
Exemple 2

Calculer l'énergie cinétique d'une tige par rapport à un axe passant par son extrémité en utilisant le calcul direct et le calcul indirect.

a) Calcul direct : L'énergie cinétique de la tige

$$T = \frac{1}{2} I_{/\Delta} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} ML^2\dot{\theta}^2$$

b) Calcul indirect : le mouvement peut être décomposé en une translation du centre de gravité plus une rotation autour du centre de gravité



$$T = T_{tran} + T_{rot}$$

La masse étant homogène, son centre de gravité se trouve au milieu

$$T_{tran} = \frac{1}{2}M(\frac{L}{2})^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M\frac{L^2}{4} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{8}ML^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique du mouvement relatif autour du centre de gravité

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_{/cg}\dot{\theta}^2$$

Où $I_{/cg}$ est le moment d'inertie de la barre par rapport au centre de gravité.

$$I_{/cg} = \int dm\, l^2 = \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda dl\, l^2 = \frac{1}{3}\lambda l^3 \Big|_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{3}\lambda\left(\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right) = \frac{1}{3}\lambda\frac{L^3}{4} = \lambda L\frac{L^2}{12} = \frac{1}{12}ML^2$$

Donc l'énergie cinétique de la barre est

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)ML^2\dot{\theta}^2$$

Remarque

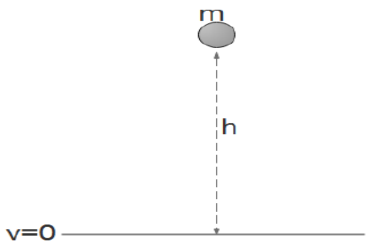
Évidemment le choix de la méthode de calcul dépend de la complexité du système étudié.

Pour les systèmes constitués des disques en mouvements, il est préférable d'utiliser la méthode indirecte.

1.7. Energie potentielle

6.1. Énergie potentielle gravitationnelle: est l'énergie due au champ gravitationnel, et cette énergie dépond d'un choix arbitraire du niveau zéro de l'énergie potentielle.

Centre de gravité est au-dessus du niveau V= 0



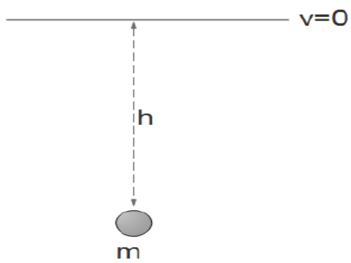
$V = mgh + C$

C est une constante que l'on peut déterminer à partir d'un choix arbitraire de niveau zéro de l'énergie potentielle.

h est la hauteur de la masse par rapport au niveau zéro de l'énergie potentielle.

Pour h = 0, nous avons choisi V = 0, et donc C = 0.

Centre de gravité est au-dessous du niveau V=0



$V = -mgh + C$

Le signe (–) s'ajoute car le centre de gravité de la masse est au-dessous du niveau zéro V=o.

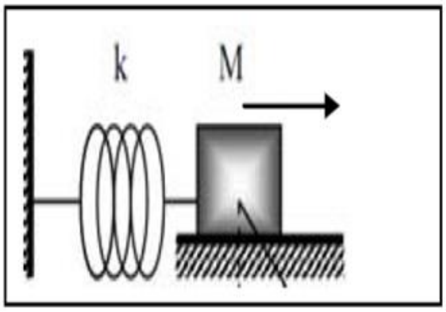
Dans ce cas aussi la constante C=0 lorsque h=*o*.

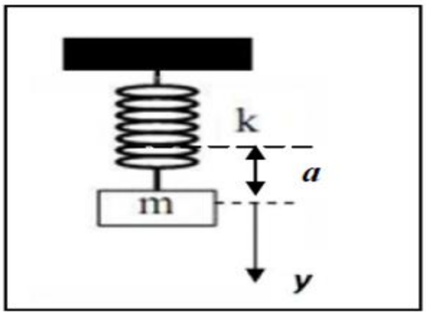
Remarque

Dans les calculs, la constate *C* disparaîtra par dérivation par rapport au temps ou par soustraction, car on ne s'intéresse généralement qu'à la différence entre les énergies potentielles associées à deux points de l'espace.

Énergie potentielle élastique : *C'est l'énergie potentielle emmagasinée dans un ressort, en allongeant ou en compressant ce dernier par rapport à sa langueur à vide.*

$V = \frac{1}{2}\,(allongement\ ou\ compression)^2 + C$



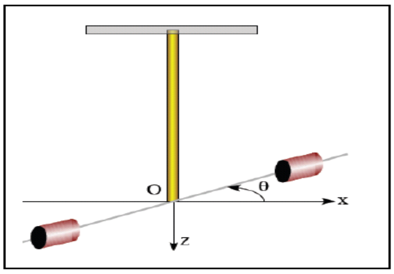


$V = \frac{1}{2}\,Kx^2 + C$

$V = \frac{1}{2}\,K(y+a)^2 + C$

*K : est la constante de raideur du ressort (*N/m)

a : est l'allongement du ressort jusqu'à la position d'équilibre.



$V = \frac{1}{2} C\,\theta^2$

C (N/rad) est une constante de torsion

L'énergie potentielle d'un système oscillatoire linéaire est proportionnelle au carré de la variable ***q***, soit $V = \frac{1}{2} K\,q^2$

1.8. Equilibre d'un système

On dit qu'un système est dans un état d'équilibre si la force résultante exercée sur le système est nulle $\sum \vec{F} = \vec{0}$

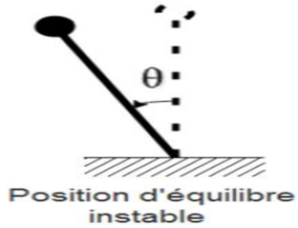
Le système est alors soit au repos, soit il effectue un mouvement rectiligne uniforme (c'est le principe d'inertie)

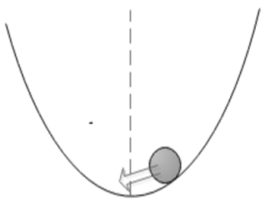
Pour un système conservative $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}V$

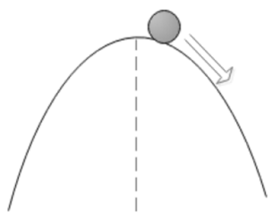
à la position d'équilibre (q_0) la force est nulle $F = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_0} = 0$

Cette position correspond à une position d'équilibre stable lorsque $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right|_{q_0} \geq 0$

Ou une position d'équilibre instable lorsque $\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right|_{q_0} \leq 0$







Position d'équilibre stable Position d'équilibre instable

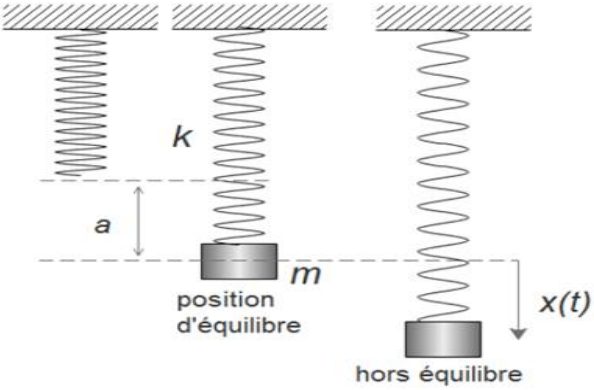
Dans l'exemple 1, l'expression de l'énergie potentielle s'écrit

$V = -mg\cos(\theta)$ et à l'équilibre $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ donc $mg\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} ou$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = mg\cos(0) \geq 0 \Rightarrow équilibre\ stable$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\pi} = mg\cos(0) \leq 0 \Rightarrow équilibre\ instable$$

Pendule oscillant vertical



$V = -Mgx + \frac{1}{2}k\,(a+x)^2 + C$

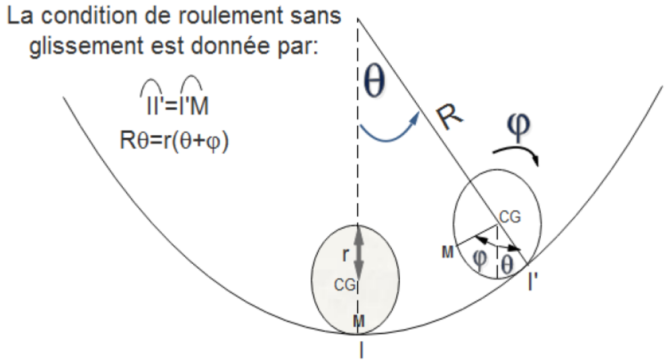
$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2}{2}\,k\,(a+x) - Mg$

A l'équilibre

$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\; = k(0+a) - Mg = k0 + (ka - Mg) = 0\; \Rightarrow Mg = ka$

C'est la condition d'équilibre de ce systèmee

Condition de roulement sans glissement



$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \qquad I = \frac{1}{2}M(R-r)^2\;\; ;\; R\theta = r(\theta+\varphi);\; \varphi = \frac{(R-r)\theta}{r}$$

Chapitre 2 : Mouvement oscillatoire libre non amorti à un degré de liberté

II.1. Introduction

On a vu dans le chapitre précédent le formalisme mathématique qui nous permit de calculer les énergies cinétique et potentielle d'un corps solide, mais notre objectif final consiste à savoir la position, la vitesse et l'accélération de chaque point de ce corps par rapport à un repère choisi en résolvant l'équation différentielle du mouvement. Pour aboutir à un tel objectif nous allons adopter un formalisme mathématique extrêmement efficace appelé le formalisme de Lagrange.

II.2. Principe de moindre action

Ce principe révéla toute sa valeur grâce aux travaux d'Euler, Lagrange, Jacobi et Helmholtz.

Un système physique évolue d'une configuration caractérisée par un ensemble de valeurs de coordonnées à l'instant t_1 vers une configuration caractérisée par un ensemble de valeurs de coordonnées à l'instant t_2, de telle façon que l'intégrale.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1,\ldots,q_N,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_N)dt$$

Prend la plus petite valeur possible. **S** et **L** s'appellent action et fonction de Lagrange, respectivement.

Avec

$$L(q_i,\dot{q}_i) = T - V$$

Est appelé le Lagrangien du système.

Où T et V sont les énergies cinétique et potentielle du système.

En mécanique, le principe de moindre action affirme qu'un corps prend la direction qui lui permet de dépenser le moins d'énergie dans l'immédiat.

Lorsqu'on laisse le principe de moindre action conduit notre voiture, il va sans doute forcer la voiture de prendre la trajectoire de telle sorte que la consommation en carburant soit minimale.

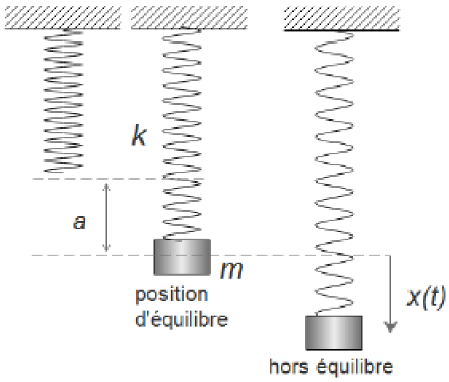
II. 3. Equation du mouvement (exemple : pendule élastique)

Une masse ponctuelle *m* suspendue à un ressort vertical de constante de raideur K. La position d'équilibre correspond à x=0.

Le Lagrangien du système

L=T-V

- Energie cinétique



$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Energie potentielle

$$V=V_m+V_K=-mgx+\frac{1}{2}K(a+X)^2$$

A l'équilibre

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{x=0}=0\Rightarrow(mg-ka)=0$$

En incérant la condition d'équilibre dans l'expression de *V*, on obtient

$$V=\frac{1}{2}Kx^2+C$$

Le Lagrangien *L* est donné par la relation *L=T-V*.

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\left(\frac{1}{2}Kx^2+C\right)$$

Pour un système à un degré de liberté l'équation du mouvement est

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

On trouve une équation différentielle linéaire de $2^{ième}$ degré et sans second membre (homogène).

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \Leftrightarrow \ddot{x}+\omega_0^2 x=0$$

L'étude mathématique des équations différentielles permet de montrer que la forme générale de la solution est :

$x(t)=Ae^{rt}$ Où A et r sont des constantes $\Rightarrow$ $\dot{x}(t)=Are^{rt}$ et $\ddot{x}(t)=Ar^2e^{rt}$

En substituant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation caractéristique et sa solution donnera les valeurs de r:

$r^2+\omega_0^2=0$ dont les solutions sont $r_1=i\omega_0$ et $r_2=-i\omega_0$

La solution générale x(t) est alors une combinaison linéaire des deux solutions :

$$x_1(t)=A_1e^{i\omega_0 t} \quad et \quad x_2(t)=A_2e^{-i\omega_0 t} \quad \Rightarrow\Rightarrow x(t)=A_1e^{i\omega_0 t}+A_1e^{-i\omega_0 t}$$

Où, A_1 et A_2 sont deux constantes qui sont déterminées à partir de deux conditions initiales.
Pour obtenir une forme simplifiée on choisit d'utiliser deux constantes C et φ qui sont reliées à A_1 et A_2 par les relations

$$A_1=\frac{1}{2}Ce^{i\varphi} \quad et \quad A_2=\frac{1}{2}Ce^{-i\varphi}$$

On obtient la solution

$$x(t)=\frac{C}{2}(\underbrace{e^{i(\omega_0 t+\varphi)}+e^{-i(\omega_0 t+\varphi)}}_{2\cos(\omega_0 t+\varphi)})$$

$$x(t)=C\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

Cette solution générale peut également se décomposer sur la base de ces deux solutions

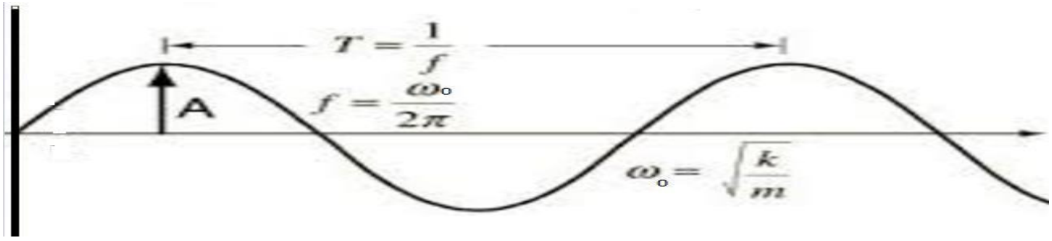
$$x(t)=B_1\cos(\omega_0 t)+B_2\sin(\omega_0 t)$$

Où le module C est

$$C=\sqrt{B_1^2+B_2^2} \text{ et } \quad \tan(\varphi)=-\frac{B_2}{B_1}.$$

La forme de la solution la plus utilisée dans les livres de physique est

$$x(t)=C\cos(\omega 0t+\varphi)$$



Les constantes C et φ sont déterminées à partir de deux conditions initiales :

Pour les conditions initiales :

$$t = o\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C\cos(\varphi) \\ \dot{x}_0 = -\omega_0 C\sin(\varphi) \end{cases}$$

On trouve :

$$C = \left[x_0^{\;2} + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \right)$$

II. 3. Approximation de faibles oscillations (Amplitudes)

Lorsqu'on se limite dans le cas des faibles oscillations, nous appliquons le théorème de Taylor

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$$

$$\sin\theta = \sin 0 + \theta\cos 0 + \frac{\theta^2}{2!}(-\sin 0) + \frac{\theta^3}{3!}(\cos 0)\cdots$$

$$\cos\theta = \cos 0 + \theta(-\sin 0) + \frac{\theta^2}{2!}(-\cos 0) + \frac{\theta^3}{3!}(\sin 0)\cdots$$

Généralement dans nos calculs, pour la fonction sinus on se limite au deuxième terme.

Exemple

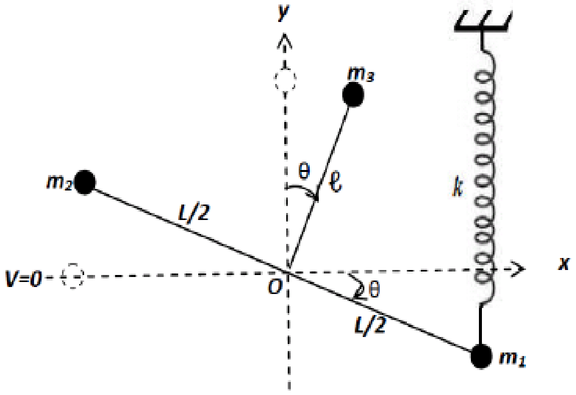
$$\theta \ll \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \qquad \theta \ll \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \qquad \sin(2°) = \sin(0.034888 rad) \approx 0.034880$$

Exemple d'application

Exemple d'application

EFS 2016

Le système ci-contre, est constitué de deux tiges perpendiculaires et de masses négligeables. m_1 m_2 et m_3 sont des masses ponctuelles, m_1 est reliée à m_2 par la tige de langueur L, m_3 est fixée à l'une des extrémités de la tige de langueur ℓ. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe fixe passant par O. Un ressort de constante de raideur k est attaché à la masse m_1. À l'équilibre $\theta=0$, le ressort est déformé par $\Delta\ell$.



1) Déterminer la condition d'équilibre et la condition de stabilité à partir de l'énergie potentielle.

2) Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.

3) Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.

4). Etabilir l'équation différentielle du mouvement. Discuter la solution de l'équation différentielle.

Solution

1) Énergie potentielle

$$V = V_{m1} + V_{m2} + V_{m3} + V_K = -m_1 g\frac{L}{2}\sin(\theta) + m_2 g\frac{L}{2}\sin(\theta) + m_3 g\,\ell\cos(\theta) + \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\theta + \Delta\ell\right)^2$$

$$\sin(\theta) \approx \theta \qquad \cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{kL^2}{4} - m_3 g\,\ell\right]\theta^2 + \left[m_2 g\frac{L}{2} + k\frac{L}{2}\Delta\ell - m_1 g\frac{L}{2}\right]\theta + C$$

- **Condition d'équilibre :**

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right]_{\theta=0} = 0 \Rightarrow m_2 g\frac{L}{2} + k\frac{L}{2}\Delta\ell - m_1 g\frac{L}{2} = 0$$

Condition de stabilité

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}\right] > 0 \Rightarrow \frac{kL^2}{4} - m_3 g\ell > 0$$

2) Expression simplifiée de l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{kL^2}{4} - m_3 g\ell\right]\theta^2 + C$$

3) Énergie cinétique

$$T = T_{m1} + T_{m2} + T_{m3} = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_3\ell^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_3\ell^2\right]\dot{\theta}^2$$

4) Equation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{\frac{kL^2}{4} - m_3 g\ell}{m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_3\ell^2}\right)}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

Solution de l'équation du mouvement

-Lorsque l'équilibre est stable , la solution est : $\theta(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

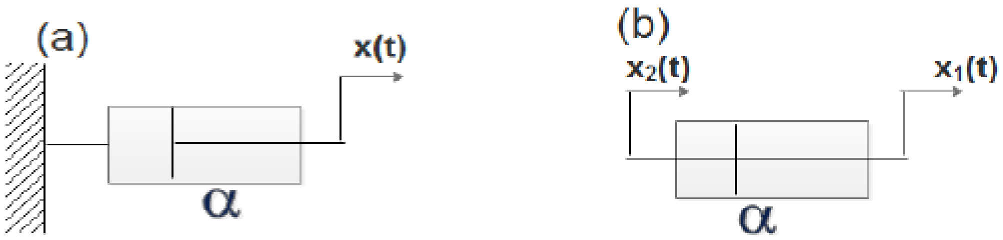
-Lorsque l'équilibre est instable, la solution est : $\theta(t) = B_1 e^{\omega_0 t} + B_2 e^{-\omega_0 t}$

Chapitre 3 : Mouvement oscillatoire libre amorti à un degré de liberté

Définitions :

Amortisseur

Un amortisseur est un dispositif servant à amortir le mouvement, il est constitué d'un élément (ou deux éléments) mobile à l'intérieur d'un récipient contenant un fluide visqueux.



Si le corps se déplace avec de faible vitesse, la force de frottement est donnée par :

-Cas (a) $f_f = -\alpha\dot{x}$ ($\dot{x}$ est la vitesse relative de la partie mobile de l'amortisseur par rapport à la partie fixe.

- Cas (b) $f_f = -\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ est la vitesse relative des deux parties mobiles de l'amortisseur l'une par rapport à l'autre.

où α est appelé ***coefficient de frottement***. L'unité de α peut être déterminée à l'aide de l'équation aux dimensions : $[\alpha] = \frac{[f_f]}{[v]} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$

Dans le cas (a) la force de frottement peut être écrite comme la dérivée par rapport à la vitesse d'une fonction qu'on appelle **fonction de dissipation D**.

$$f_f = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \Rightarrow D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

III.2. Equation du mouvement d'un système amorti

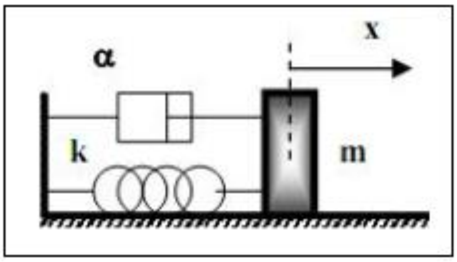
L'équation de Lagrange d'un système amorti à un degré de liberté est donnée par :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}_{ma} \underbrace{-\frac{\partial L}{\partial x}}_{\sum f_{conservative}} = \underbrace{-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}}_{\sum f_{frottement}} \Leftrightarrow ma = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial x}}_{\sum f_{conservative}} + \sum f_{frottement} \quad car \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial (T-V)}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$ma = \sum f_{conservative} + \sum f_{frottement} = \sum f_{extérieure} \qquad \textit{C'est la } 2^{ieme} \textit{ loi de Newton}$$

Exemple (pendule élastique)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x} \qquad V = \frac{1}{2}kx^2 \qquad D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$



On obtient l'équation du mouvement suivante

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

On peut l'écrire sous la forme

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$$

où λ est appelé le **facteur d'amortissement,** avec $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$, et ω_0 est la pulsation propre du système, $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$.

On remarque que λ est homogène à l'inverse d'un temps et son unité est s^{-1}. Plus λ est grand, plus l'amortissement est important et plus l'oscillateur s'arrête vite.

III.4. Solution de l'équation du mouvement

On cherche une solution de la forme

$$x(t) = Ce^{rt}$$

De l'équation du mouvement on déduit l'équation caractéristique

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$$

La solution dépend du discriminant réduit $\Delta = \lambda^2 - \omega_0{}^2$. On distingue trois cas possibles, selon que λ est supérieure, inférieure ou égale à ω_0.

Premier cas : ***Amortissements grands (système suramorti ou apériodique)***

$\lambda > \omega_0$

Dans ce cas, l'équation caractéristique possède deux solutions réelles et négatives

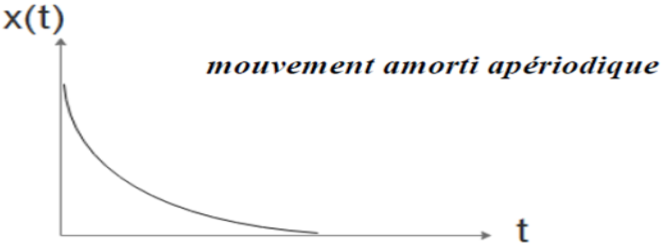
$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - {\omega_0}^2}$$

La solution générale x(t) s'écrit comme combinaison linéaire des solutions correspondantes à chacune des valeurs de *r*:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées à partir de deux conditions initiales.

Puisque les valeurs r_1 et r_2 sont négatives, la solution $x(t) \Rightarrow 0$ quand $t \Rightarrow \infty$. Ce type de mouvement est appelé mouvement **amorti apériodique.**



Deuxième cas : ***Amortissement critique***

$\lambda = \omega_0$ L'équation caractéristique possède une racine double : $r_1 = r_2 = \lambda$

La solution générale s'écrit: $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}$

Démonstration

On fait le changement de variable suivant :

$$y(t) = \dot{x} + \lambda x \Rightarrow \frac{d}{dt} y(t) = \ddot{x} + \lambda \dot{x}$$

L'équation différentielle devient

$$\frac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \lambda(\dot{x} + \lambda x) = 0}^{\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0{}^2 x=0} \quad car \quad \lambda^2 = {\omega_0}^2$$

Pour résoudre cette équation, nous cherchons les solutions du système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} + \lambda y(t) = 0 & \ldots \quad (1) \\ y(t) = \dot{x} + \lambda x & \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

De l'équation (1), on trouve

$$y(t) = C_2 e^{-\lambda t}$$

La solution de la deuxième équation du système s'écrit

$$x(t) = C(t)e^{-\lambda t}$$

En injectant cette solution dans l'équation différentielle de x(t), on tire que

$\dfrac{dC}{dt} = C_2$. D'où $C(t) = C_1 + C_2 t$

C'est-à-dire que la solution générale est

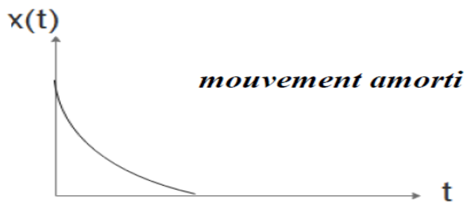
$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}$$

Dans ce cas, le mouvement est aussi apériodique. Cet état du système **s'appelle état critique**

b.

Remarque

*Dans l'état critique **x(t)** tend vers **0** plus vite que l'état apériodique (amortissements grands) .*



Troisième cas : ***Amortissements faibles*** **(système sous-amorti ou pseudo périodique)**

$\lambda < \omega_0$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^{\ 2} - \lambda^2} \equiv -\lambda \pm i\omega'$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \lambda^2}$$

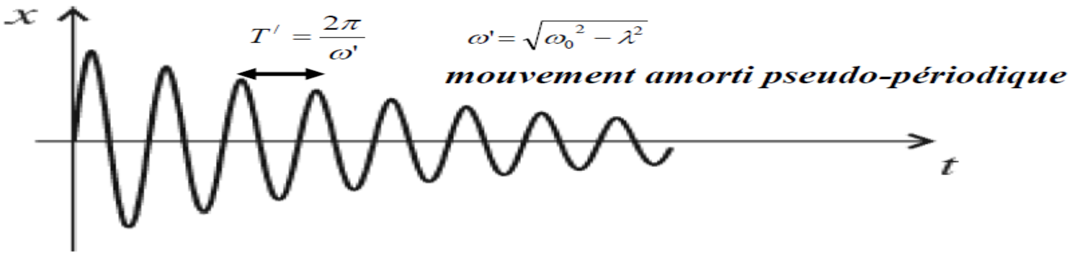
Est la pseudo-pulsation

La solution générale est **pseudo-périodique** (voir le graphe ci-dessous), elle est de la forme

$$x(t) = (\underbrace{C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}}_{C\cos(\omega' t+\varphi)})e^{-\lambda t} = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi)$$

La pseudo-pulsation du mouvement est plus petite que la pulsation propre du système non amorti. $\omega' < \omega_0$.

On parle de régime pseudo-périodique car le mouvement a une certaine régularité, car le temps qui s'écoule entre deux maxima successifs (pseudo-période T') est constant (figure).



Conditions initiales

$$\begin{cases} x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -C\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi) - C\omega' e^{-\lambda t}\sin(\omega' t + \varphi) \end{cases}$$

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = C\cos\varphi = x_0 & (1) \\ \dot{x}(0) = -C\lambda\cos(\varphi) - C\omega'\sin(\varphi) = \dot{x}_0 & (2) \end{cases}$$

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \Rightarrow \sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{C^2}}$$

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x_0}{C} \\ (2) \Rightarrow -C\lambda\cos(\varphi) - C\omega'\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x_0}{C} \\ -C\lambda\frac{x_0}{C} - \sqrt{C^2}\,\omega'\sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{C}\right)^2} = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow -\lambda x_0 - \omega'\sqrt{C^2 - x_0^2} = \dot{x}_0$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega'} + \frac{\lambda x_0}{\omega'}\right)^2 + x_0^2}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{-C\lambda\cos(\varphi) - C\omega'\sin(\varphi)}{C\cos\varphi} = \frac{\dot{x}_0}{x_0} \Rightarrow -\lambda - \omega'\tan(\varphi) = \frac{\dot{x}_0}{x_0}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{-1}{\omega'}\left[\frac{\dot{x}_0}{x_0} + \lambda\right]$$

III.5. Décrément logarithmique

On définit le décrément logarithmique D_{ln} qui représente la décroissance de l'amplitude à une seule période

$$D_{\ln} = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T')}\right) = \lambda T'$$

$$D_{\ln} = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T')}\right) = \ln\frac{Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi)}{Ce^{-\lambda(t+T)}\cos(\omega'(t+T') + \varphi)} = \lambda T' \qquad \text{car } T' = \frac{2\pi}{\omega'}$$

T' est la pseudo-période du système.

Après n pseudo période T', le décrément logarithmique est donné par :

$$D_{\ln} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT')}\right) = \lambda T'$$

Réciproquement, on peut déterminer la pseudo-période T' en fonction du décrément logarithmique $D_{\ln}$:

$$\left.\begin{aligned} \omega'^2 &= \omega_0{}^2 - \lambda^2 \\ D_{\ln} &= \lambda T' \end{aligned}\right\} \Rightarrow T' = T_0\sqrt{1 + \frac{D_{\ln}{}^2}{4\pi^2}}$$

III.6. Energie mécanique d'un oscillateur amorti

L'énergie mécanique du pendule élastique est la somme des énergies cinétique et potentielle.

$$E = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi) \qquad et \qquad \dot{x}(t) = -C\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega' t + \varphi) - C\omega' e^{-\lambda t}\sin(\omega' t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -Ce^{-\lambda t}\underbrace{\left[\lambda\cos(\omega' t + \varphi) + \omega'\sin(\omega' t + \varphi)\right]}_{A\sin(\omega' t + \varphi + \alpha)} \qquad avec \quad A = \sqrt{\lambda^2 + \omega'^2} = \omega_0 \qquad et \quad \tan\alpha = \frac{\lambda}{\omega'}$$

On trouve donc : $\dot{x}(t) = -C\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega' t + \varphi + \alpha)$

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\cos^2(\omega' t + \varphi) + \frac{1}{2}mC^2\left(\frac{K}{m}\right)e^{-2\lambda t}\sin^2(\omega' t + \varphi + \alpha)$$

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[\cos^2(\omega' t + \varphi) + \sin^2(\omega' t + \varphi + \alpha)\right] = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1 - \sin^2(\omega' t + \varphi) + \sin^2(\omega' t + \varphi + \alpha)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1 + \left(\sin(\omega' t + \varphi + \alpha) + \sin(\omega' t + \varphi)\right)\left(\sin(\omega' t + \varphi + \alpha) - \sin(\omega' t + \varphi)\right)\right]$$

On utilise les formules trigonométriques: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ et $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1 + \left(2\sin(\omega' t + \varphi + \frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(2\cos(\omega' t + \varphi + \frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\alpha}{2})\right)\right]$$

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1 + \left(\underbrace{2\sin(\omega' t + \varphi + \frac{\alpha}{2})\cos(\omega' t + \varphi + \frac{\alpha}{2})}_{\sin 2(\omega' t + \varphi + \frac{\alpha}{2})}\right)\underbrace{\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\alpha}{2})\right)}_{\sin\alpha}\right]$$

Nous obtenons l'expression finale de l'énergie mécanique.

$$E = \frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda t}\left[1 + \sin\alpha \times \sin 2(\omega' t + \varphi + \frac{\alpha}{2})\right]$$

III.7. Facteur de qualité

On appelle facteur de qualité Q le rapport entre l'énergie mécanique et la perte d'énergie dans une pseudo période.

$$Q=2\pi\frac{E(t)}{E(t)-E(t+T')}$$

Q est une grandeur physique sans dimension.
On a :

$$E(t+T')=\frac{1}{2}KC^2e^{-2\lambda(t+T')}\left[1+\sin\alpha\times\sin 2(\omega'\underbrace{(t+T')}_{t+\frac{2\pi}{\omega'}}+\varphi+\frac{\alpha}{2})\right]$$

Nous trouvons donc :

$$Q=2\pi\frac{E(t)}{E(t)-E(t+T')}=\frac{2\pi}{1-e^{-2\lambda T'}}$$

Dans le cas des faibles amortissements : $\lambda<<\omega'=\sqrt{\omega_0{}^2-\lambda^2}\approx\omega_0$

$$e^{\varepsilon}=1+\varepsilon\Rightarrow e^{-2\lambda T'}\approx e^{-2\lambda\frac{2\pi}{\omega_0}}\approx 1-4\pi\frac{\lambda}{\omega_0}$$

On trouve finalement l'expression du facteur de qualité dans le cas des faibles amortissements :

$$Q=\frac{\omega_0}{2\lambda}$$

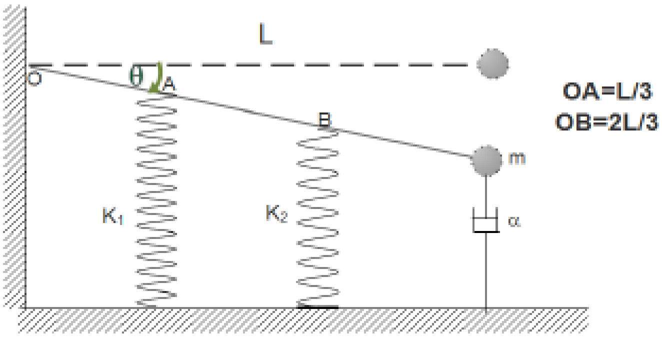
Ce facteur est d'autant plus grand que l'amortissement est faible, ***et il est d 'une très grande importance pour les ingénieures, parce qu'une grande valeur de Q (amortissement faible), peut provoquer la destruction des bâtiments et des ouvrages d'art comme les ponts (voir le prochain chapitre : phénomène de résonance).***

Exemple d'application

Pour le système ci-contre

1) Donner la condition d'équilibre si l'équilibre correspond à θ=0.

2) Trouver l'équation différentielle du mouvement



Solution

$$V_{k_1} = \frac{1}{2}k_1(a_1 + d_1\theta)^2 \qquad d_1 = \frac{L}{3}$$

$$V_{k_{k_1}} = \frac{1}{2}k_2(a_2 + d_2\theta)^2 \qquad d_2 = \frac{2L}{3}$$

$$V_m = -mgL\theta$$

Condition d'équilibre

$$k_1 d_1 a_1 + k_2 d_2 a_2 = mgL$$

$$V = \frac{1}{2}k_1(d_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(d_2\theta)^2 = \frac{1}{18}L^2(k_1 + 4k_2)\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$$

Equation du mouvement

$$mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + \frac{1}{9}L^2(k_1 + 4k_2)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{(k_1 + 4k_2)}{9m}$$

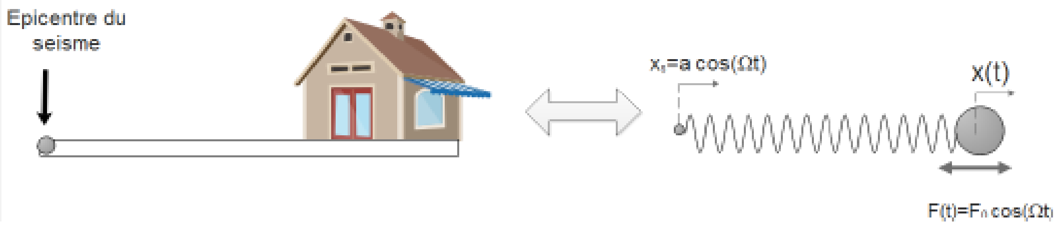
Chapitre 4. Oscillations forcées à un degré de liberté

1. Introduction

Si l'on veut que les oscillations se maintiennent avec la même amplitude, il faut continuellement fournir au système une quantité d'énergie égale à celle perdue à cause des forces de frottements, autrement dit, il faut appliquer une fore extérieure, et les oscillations dans ce cas sont appelées oscillations forcées.
En général, on définit une oscillation forcée, tout système en mouvement soumis à l'action d'une force extérieure F(t) variable.

Exemple : mouvement sismique

Un immeuble modélisé par un système masse-ressort subit à un mouvement sismique sinusoïdal de la forme : $x_s(t)=a\cos(\Omega t)$, à cause de la propagation de ce mouvement une force $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$ est appliquée à la masse m.



Energie cinétique

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Energie potentielle

$$V=\frac{1}{2}k(x-x_s)^2$$

L'équation du mouvement de ce système s'écrit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=F(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

2 . Équation du mouvement (masse-ressort-amortisseur)

L'équation du mouvement d'un système forcé est donnée par l'équation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=F_q(t)$$

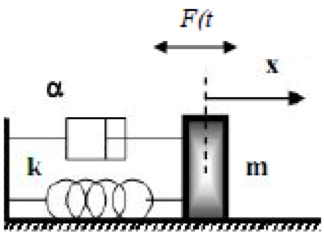
Où, $F_q(t)$ est appelée la force généralisée, elle est donnée par la relation.

$$F_q(t)=\overrightarrow{F(t)}.\frac{d\vec{r}}{dq}$$

- $\vec{r}$ est le vecteur qui repère le point d'application de la force extérieure.

- Lorsque q décrit un déplacement, la force généralisée est la force extérieure appliquée au système.
- Lorsque q décrit une variable de rotation (angle), la force généralisée dans ce cas est le moment de la force extérieure appliquée au système.

***Exemple* : Pendule élastique horizontal**



L'équation du mouvement de ce système est :

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_o^2 x=\frac{F(t)}{m} \qquad (1)$$

$$\lambda=\frac{\alpha}{2m} \quad et \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'équation différentielle (1) est linéaire non homogène (avec second membre) à coefficients constants.

3 .Solution de l'équation du mouvement

La solution générale de l'équation (1) est la somme de la solution de l'équation homogène x_H (sans second membre) et la solution particulière de l'équation différentielle avec le second membre x_p.

$$x(t)=x_H(t)+x_p(t)$$

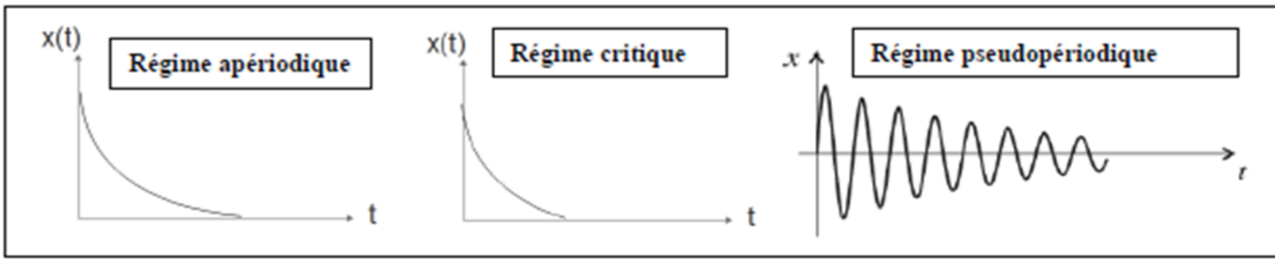
3.1. Régime transitoire (début du mouvement→ $x_H(t)\neq 0$)

Il faut signaler qu'au début du mouvement la solution $x_H\,(t)$ **n'est pas nulle** et la solution générale est la somme de x_H et x_p on est alors dans **le régime transitoire**.

$$x\,(t)=x_H\,(t)+x_p\,(t)$$

l'expression de la solution homogène x_H dépend du Δ' , mais dans tous les cas x_H tend vers zéro après un certain temps (voir les figures).

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^{\,2}x=0 \qquad x_H\xrightarrow{\nabla régime} 0$$



3.2. Régime permanent (solution homogène tend vers zéro)

Au fil du temps la solution homogène $x_H(\,t\,)$ tend vers zéro, donc il ne nous reste comme solution que la solution particulière $xp\,(\,t\,)$.

$$\underbrace{x(t)=x_H(t)+x_p(t)}_{régime\quad transitoire} \quad \text{Après une courte durée } x(t)=\underbrace{x_p(t)}_{régime\quad permanent}$$

$$x(\,t\,)=x_p\,(\,t\,)$$

3.3. Méthode des nombres complexes

La méthode des nombres complexes permet de transformer l'équation différentielle en une équation algébrique.

$$\boxed{\text{Equation différentielle}} \xrightarrow{\text{Méthode des nombres complexes}} \boxed{\text{Equation algébrique}}$$

La force extérieure est une fonction périodique du temps de pulsation Ω .

$$F(t)=F_0\cos(\Omega t)$$

La notation complexe de la force est :

$$\underline{F(t)} = F_0 e^{i\Omega t} \quad avec \quad F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = \mathrm{Re}\left[F_0 e^{i\Omega t}\right]$$

Re : signifie la partie réelle du nombre complexe.

On cherche une solution particulière de la même forme que le second membre de l'équation différentielle :

$x(t) = x_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ Sa notation complexe est $\underline{x(t)} = x_0 e^{i(\Omega t+\varphi)} = \underbrace{x_0 e^{i\varphi}}_{\underline{X_0}} e^{i\Omega t}$

On pose :

$$\underline{X_0} = x_0 e^{i\varphi}$$

Alors, on peut écrire :

$$\underline{x(t)} = \underline{X_0} e^{i\Omega t}$$

En substituant l'expression de *x(t)* dans l'équation différentielle (1), on trouve la solution complexe :

$$\underline{X_0} = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega} \quad et \quad \underline{X_0} = x_0 e^{i\varphi}$$

On cherche le module et l'argument de ce nombre complexe :

$$x_0 = \left|\underline{X_0}\right| = \frac{\left|\dfrac{F_0}{m}\right|}{\left|(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega\right|} \; et \quad \varphi = \arg ument(\underline{X_0}) = \arg \frac{\left[\dfrac{F_0}{m}\right]}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega\right]}$$

On peut écrire ;

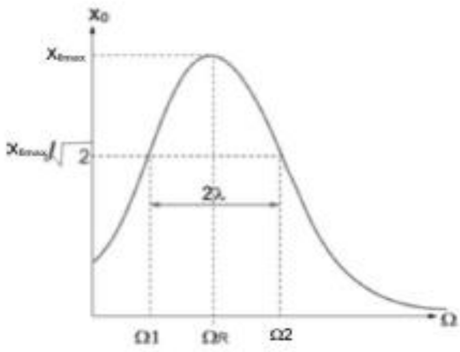
$$\varphi = \arg(\underline{X_0}) = \arg\left[\frac{F_0}{m}\right] - \arg\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega\right] = 0 - \arctan\left[\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right]$$

Le module de ce nombre complexe donne la valeur de x_0 et son argument donne la valeur de φ :

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \qquad \varphi = -\arctan\left[\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right]$$

4. Variation de l'amplitude en fonction de la pulsation

Lorsqu'on varie la pulsation de la force excitatrice, l'amplitude x_0 atteint une valeur maximale lorsque la dérivé de x_0 par rapport à Ω est nulle.



$$\frac{dx_0}{d\Omega}=-\frac{2\frac{F_0}{m}\Omega\left[\Omega^2-\omega_0^2+2\lambda^2\right]}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0$$

Il existe un maximum à la pulsation de résonance Ω_R seulement si la condition de résonance est vérifiée :

$$\omega_0^2>2\lambda^2\Rightarrow \qquad \Omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2}$$

On constate sur la figure que l'amplitude x_0 est d'autant plus importante que la pulsation de la force extérieure est proche de la pulsation de résonance.

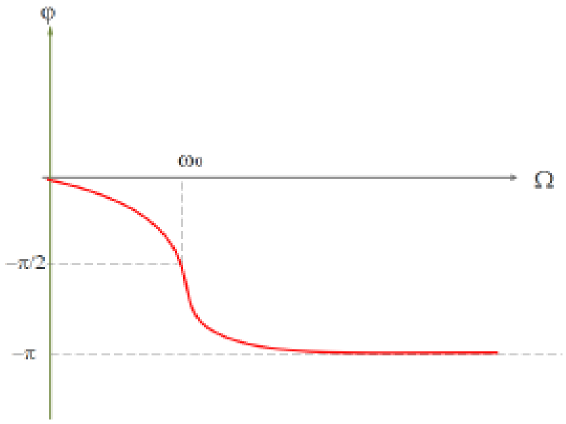
Remarque

Dans le domaine du bâtiment et/ou du génie civil, si la pulsation de résonance du résonateur (bâtiment, pont…) coïncide avec la pulsation de l'excitateur (vent fort, tremblements de terre... l'amplitude du résonateur peut prendre de très grandes valeurs, et cela peut provoquer la destruction des bâtiments et des ouvrages d'art comme les ponts. On peut citer comme exemple : le 7 novembre 1940, le pont de Tacoma Narrows s'effondre sous l'action du vent.

5. Variation de la phase en fonction de la pulsation

Nous avons déjà calculé φ :

$$\varphi = -\arctan\left[\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right] \Rightarrow \tan(-\varphi) = \frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

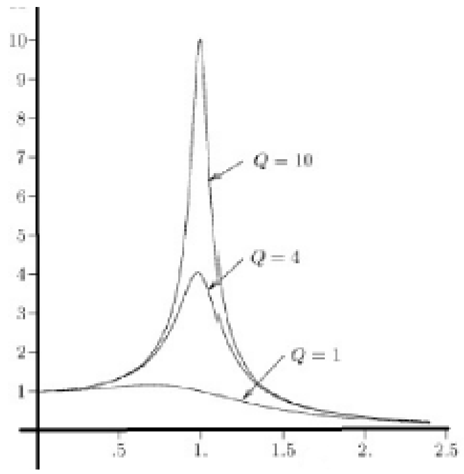


Pour les faibles amortissements, on a :

$$\lambda << \omega_0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \approx \omega_0$$

On peut tracer la variation de φ en fonction de Ω, en servant du tableau suivant :

Ω	0	ω_0	+α
φ	0	-π/2	-π



Pour pouvoir diminuer l'amplitude de résonance, on essaye de diminuer la valeur du facteur de qualité Q .

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Omega 2 - \Omega 1}$$

$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\lambda$ est appelé ***la bande passante***.

Lorsque le facteur d'amortissement augmente la bande passante augmente et le facteur de qualité diminue, et par conséquent l'amplitude de vibration diminue également (figure).

Les pulsations Ω_1 et Ω_2 sont appelées les pulsations de coupure, pour lesquelles :

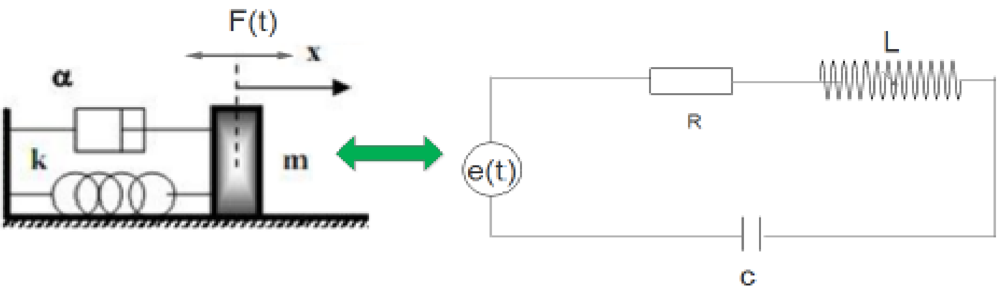
$$x_0(\Omega_1) = x_0(\Omega_2) = \frac{x_{0max}}{\sqrt{2}}$$

6. Analogie électrique

Des systèmes mécaniques peuvent être représentés par des circuits électriques analogues. On constate que la relation entre le courant électrique *i* et la charge électrique *q* est exactement de même nature que celle qui existent entre la vitesse *v* et la position *x* d'un système mécanique :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad et \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Analogie force tension : On prend l´exemple suivant :



En appliquant le formalisme de Lagrange:
$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$

En appliquant la loi des mailles, on trouve:
$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$

Sur le plan mathématique, les deux équations différentielles sont parfaitement analogues : Par identification, on peut facilement résumer les relations d'équivalence entre les deux systèmes dans le tableau suivant :

Système mécanique	Système électrique
Masse (m)	Bobine (L)
Amortisseur (α)	Résistance (R)
Ressort (k)	Condensateur (1/C)
Vitesse *v(t)*	Courant *i(t)*
Force extérieur *F(t)*	Tension *e(t)*
Moteur	Générateur de tension

7. Puissance fournie et puissance dissipée

- **Puissance fournie par la force extérieure**

La puissance fournie par la force extérieure peut être calculée à partir de la relation :

$$P_f(t) = F_{ext}(t).v(t)$$

F_{ext} : est la force extérieure appliquée sur le système.

v(t) : est la vitesse du point d'application de la force extérieure.

Dans le cas où :

$$v(t) = \dot{x}(t) \quad avec \quad x(t) = x_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

La puissance instantanée fournie par la force s'écrit :

$$P_f(t) = -F_0 \Omega x_0 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t + \varphi)$$

Sa valeur moyenne est :

$$\langle P_f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T -F_0 \Omega x_0 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t + \varphi) dt$$

- **Puissance dissipée par l'amortisseur**

Cette puissance est donnée par la relation

$$P_\alpha(t) = \alpha v_\alpha{}^2 = \alpha \dot{x}_\alpha{}^2 \Rightarrow P_\alpha(t) = \alpha x_0^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi)$$

La puissance moyenne dissipée

$$\langle P_\alpha(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha x_0^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \varphi) dt$$

On trouve après le calcul :

$$\langle P_\alpha(t) \rangle = \frac{1}{2} \alpha x_0^2 \Omega^2$$

8. Impédance électrique et impédance mécanique

L'impédance électrique est une grandeur qui caractérise la manière dont le circuit freine le passage du courant en donnant le rapport qui existe entre la tension de la source et le courant résultant.

Lorsqu'on utilise la notation complexe du courant électrique

$$\underline{I} = I_0 e^{j\Omega t}$$

L'impédance électrique est définie par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} \qquad (ohm)$$

- **Résistance**

$$\underline{V}_R = R\underline{I} \Rightarrow \underline{Z}_R = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = R$$

- **Bobine**

$$\underline{V}_L = L\frac{d\underline{I}}{dt} = i\Omega L\underline{I} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = i\Omega L$$

- **Condensateur**

$$\underline{V}_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C}\int \underline{I}di = \frac{\underline{I}}{i\Omega C} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}} = \frac{1}{i\Omega C}$$

On observe clairement le déphasage entre le courant et la tension lorsqu'on utilise la notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{Z}_R = R = Re^{i0} \\ \underline{Z}_L = i\Omega L = \Omega L e^{i\pi/2} \\ \underline{Z}_C = \dfrac{1}{i\Omega C} = \dfrac{1}{\Omega C}e^{-i\pi/2} \end{cases}$$

Par analogie, on peut définir aussi l'impédance mécanique par la relation suivante :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{v}(t)}$$

- **Amortisseur**

$$\underline{Z}\alpha = \frac{F_\alpha}{v_\alpha} = \frac{\alpha v}{v} = \alpha$$

- **Ressort**

$$\underline{Z}_k = \frac{F_k}{v_\alpha} = \frac{kx}{\dot{x}} \quad avec \quad x = x_0 e^{i\Omega t} \Leftrightarrow \dot{x} = i\Omega x_0 e^{i\Omega t}$$

$$\underline{Z}_k = \frac{kx_0 e^{i\Omega t}}{i\Omega x_0 e^{i\Omega t}} = \frac{k}{i\Omega}$$

- **Masse**

$$\underline{Z}_m = \frac{F_m}{v} = \frac{ma}{v} \qquad a = \ddot{x} = \dot{v} = i\Omega v$$

$$\underline{Z} = \frac{im\Omega v}{v} = im\Omega$$

Chapitre 5: Mouvement oscillatoire à plusieurs degrés de liberté

5.1 Définitions

Les systèmes à plusieurs degrés de liberté sont des systèmes qui nécessitent plusieurs coordonnées indépendantes. Le nombre de degré de liberté détermine le nombre d'équations différentielles régissant l'évolution dans le temps de ces coordonnées.

En fait, il existe deux types de systèmes :

5.1.1 Systèmes à plusieurs sous systèmes découplés :

La position de la masse m sur la figure 5.1 est repérée par deux coordonnées cartésiennes indépendantes x_1 et x_2, car se déplaçant, sans frottement, dans un plan.

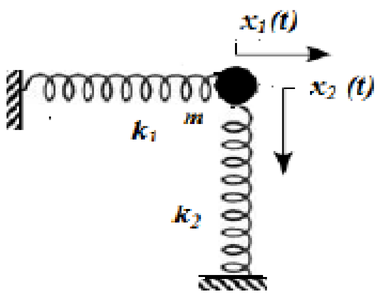


Figure 5.1: Mouvement oscillatoire non couplé à deux degrés de liberté

Pour calculer le Lagrangien du système, on suppose qu'à l'équilibre les ressorts sont lâches avec une longueur à vide l_0. L'énergie cinétique du système s'écrit sous la forme :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \qquad (5.1)$$

L'énergie potentielle du système s'écrit sous la forme :

$$U = \frac{1}{2}k_1\left(\sqrt{x_2^2 + (x_1 + l_0)^2} - l_0\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\sqrt{x_1^2 + (x_2 + l_0)^2} - l_0\right)^2$$

Pour de faibles oscillations, on peut avec une bonne approximation négliger les termes en $\left(\frac{x_1}{l_0}\right)^2$, $\left(\frac{x_1}{l_0}\right)^2$ tout en gardant les termes $\frac{x_1}{l_0}$ et $\frac{x_2}{l_0}$. L'expression ci-dessus de l'énergie potentielle devient

$$U=\frac{1}{2}k_1\left(l_0\sqrt{\left(\frac{x_2}{l_0}\right)^2+\left(\frac{x_1}{l_0}\right)^2+2\frac{x_1}{l_0}+1}-l_0\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left(l_0\sqrt{\left(\frac{x_1}{l_0}\right)^2+\left(\frac{x_2}{l_0}\right)^2+2\frac{x_2}{l_0}+1}-l_0\right)^2$$

En utilisant un développement limité, les termes au carré dans l'expression di-dessus s'écrivent sous la forme :

$$l_0\sqrt{\left(\frac{x_2}{l_0}\right)^2+\left(\frac{x_1}{l_0}\right)^2+2\frac{x_1}{l_0}+1}\approx l_0\left(1+\frac{x_1}{l_0}\right)=l_0+x_1$$

et

$$l_0\sqrt{\left(\frac{x_1}{l_0}\right)^2+\left(\frac{x_2}{l_0}\right)^2+2\frac{x_2}{l_0}+1}\approx l_0\left(1+\frac{x_1}{l_0}\right)=l_0+x_2$$

Ce qui permet de réécrire l'expression de l'énergie potentielle sous la forme suivante :

$$U=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2 \tag{5.2}$$

Le Lagrangien du système s'écrit alors :

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k_1x_1^2-\frac{1}{2}k_2x_2^2 \tag{5.3}$$

En effet, ce Lagrangien peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux Lagrangiens indépendants (l'un en fonction de $x_1$set $\dot{x}_1$et l'autre en fonction de x_2 set $\dot{x}_2$) sans qu'il y ait un terme qui les relie :

$$L=L_1(x_1,\dot{x}_1)+L_2(x_2,\dot{x}_2)=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2-\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}k_2x_2^2$$

C'est là un système composé de deux sous systèmes indépendants et découplés. Le système différentiel s'exprime alors sous la forme:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}-\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0\\[2mm]\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}_2}-\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}m\ddot{x}_1+k_1x_1=0\\ m\ddot{x}_2+k_2x_2=0\end{cases} \tag{5.4}$$

On obtient un système différentiel découplé qui s'exprime comme:

$$\begin{cases}\ddot{x}_1+\omega_{01}^2x_1=0\\ \ddot{x}_2+\omega_{02}^2x_2=0\end{cases}\text{avec}\quad\omega_{01}^2=\frac{k_1}{m_1},\omega_{02}^2=\frac{k_1}{m_1}$$

Les deux solutions des sous-systèmes indépendantes sont de la forme:

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_{01}t + \varphi_1) \\ x_2(t) = B\cos(\omega_{02}t + \varphi_2) \end{cases} \tag{5.5}$$

Pour un système forcé, on a le modèle représenté dans la figure 2.5 :

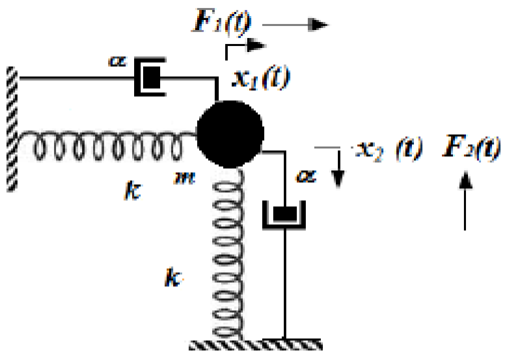


Figure 5.2: Mouvement Forcé non couplé à deux degrés de liberté

Les équations différentielles du système sont données comme suit :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t) \\ m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t) \end{cases} \tag{5.6}$$

On constate que l'équation différentielle est de type linéaire. Ainsi, on peut appliquer le théorème de superposition qui consiste à écrire la solution globale *x(t)* sous la forme suivante:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

avec

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

5.1.2 Système complexe (couplé):

C'est un système constitué par plusieurs sous-systèmes couplés comme le montre la figure (5.3).

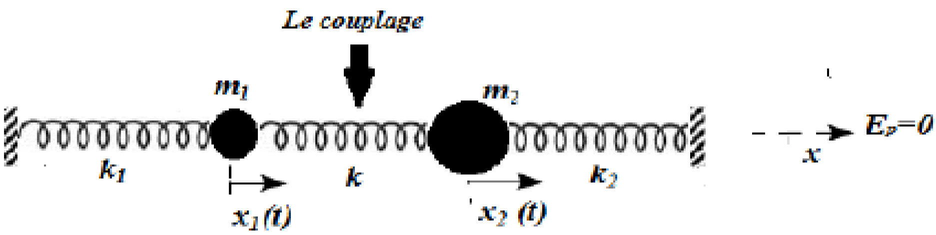


Figure 5.3: Mouvement oscillatoire d'un système couplé à deux degrés de liberté

Le Lagrangien du système en mouvement sans frottement s'écrit comme suit :

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} k_i x_i^2 \qquad (5.7)$$

Le système d'équations différentielles s'écrit :

$$\begin{matrix} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k) x_1 - k x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k) x_2 - k x_1 = 0 \end{cases} \qquad (5.8)$$

Pour résoudre ce système d 'équations différentielles linéaires, on peut se proposer des solutions sinusoidales (en se basant sur notre expérience à résoudre des systèmes linéaires à un degré de liberté), où les masses oscilleront à la même pulsation ω_p avec des amplitudes différentes et des phases différentes ; en l'occurence:

$$\begin{cases} x_1(t) = \widetilde{A}_1 e^{j\omega_p t} \\ x_2(t) = \widetilde{A}_2 e^{j\omega_p t} \end{cases} \qquad (5.9)$$

avec

$$\begin{cases} \widetilde{A}_1 = A_1 e^{j\varphi_1} \\ \widetilde{A}_2 = A_2 e^{j\varphi_2} \end{cases} \qquad (5.10)$$

En remplaçant les solutions proposées dans le système différentiel, on obtient le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{cases} (-m_1 \omega_p^2 + k_1 + k) \widetilde{A}_1 - k \widetilde{A}_2 = 0 \\ (-m_2 \omega_p^2 + k_2 + k) \widetilde{A}_2 - k \widetilde{A}_1 = 0 \end{cases} \qquad (5.11)$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} -m_1\omega_p^2 + k_1 + k & -k \\ -k & -m_1\omega_p^2 + k_1 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Le système admet une solution non triviale si seulement si le déterminant de la matrice 2×2 est nul, d'où :

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega_p^2 + k + k_1 & -k \\ -k & -m_2\omega_p^2 + k_2 + k \end{vmatrix} = 0 \tag{5.13}$$

L'équation bicarrée (paramétrique) s'écrit donc :

$$\omega_p^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_p^2 + \omega_1^2\omega_2^2(1 - K^2) = 0 \tag{5.14}$$

avec :

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2 + k}{m_2} \quad \text{et} \quad K^2 = \frac{k^2}{(k_1 + k)(k_2 + k)}$$

où le paramètre K est appelé le coefficient du couplage. Ce dernier peut prendre des valeurs entre 0 et 1 selon la valeur de la constante de raideur du ressort de couplage k.
En effet, si $k = 0$ (le couplage entre les deux sous systèmes est lâche) K aura une valeur nulle $K = 0$. Alors que si $k \to \infty$ (le ressort de couplage se comporte comme une barre rigide par rapport aux autres ressorts du système), on aura $K \to 1$.
En faisant un changement de variable $z_p = \omega_p^2$, l'équation ci-dessus devient :

$$z_p^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)z_p + \omega_1^2\omega_2^2(1 - K^2) = 0 \tag{5.15}$$

Le discriminant de cette équation s'écrit :

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2(1 - K^2) = \omega_1^4 + \omega_2^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2K^2$$

ou encore

$$\Delta = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2\omega_2^2K^2 > 0$$

Les deux pulsations propres sont donc :

$$\begin{cases} \omega_{1_p}^2 = \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2} \\ \omega_{2_p}^2 = \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2} \end{cases} \tag{5.16}$$

Les deux pulsations propres du système sont positives ($\omega_{1_p} < \omega_{2_p}$) et leurs valeurs dépendent de la valeur du coefficient de couplage K.

En effet, pour $K = 0$, les pulsations propres sont égales à :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \dfrac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2} = \omega_2^2 \\ \omega_{2p}^2 = \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \dfrac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2} = \omega_1^2 \end{cases}$$

Ce résultat nous impose à prendre $\omega_2 < \omega_1$. D'autre part, pour $K = 1$, les pulsations propres sont égales à :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \dfrac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2} = 0 \\ \omega_{2p}^2 = \dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \dfrac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{2} = \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{cases}$$

Entre les deux valeurs extrêmes de K, les valeurs des deux pulsations suivent les allures montrées sur la figure ci-dessous.

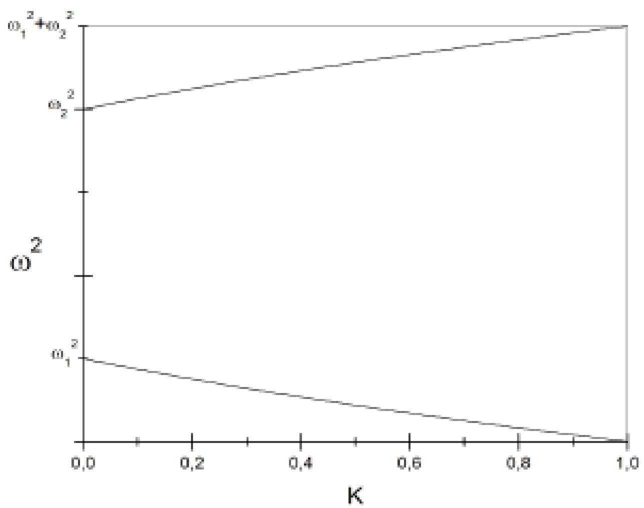


Figure 5.4: Pulsations propres du système en fonction du coefficient de couplage

On voit bien sur la figure (5.4) que l'effet de couplage est d'augmenter l'écart entre les pulsations propres du système.

Le fait que les formes sinusoidales proposées pour le mouvement des deux masses sont solutions du système d'équations pour seulement deux valeurs de ω_p à savoir ω_{1p}

et ω_{2_p} nous amène à conclure que parmi toutes les formes possibles (pas forcément simples) de mouvement de masses il existe seulement deux manières d'oscillation où les masses oscillent de façon harmonique simple avec une seule et même pulsation : ce sont là les **deux modes de vibration** des masses où celles-ci passent en même temps par leurs positions d'équilibre.

Dans chaque mode d'oscillation de pulsation normale définie ω_{1_p} ou ω_{2_p} les masses oscilleront en phase ou en opposition de phase selon la valeur des grandeurs $\widetilde{A}_1$ et $\widetilde{A}_2$.

En effet, pour le mode 1, correspondant à la pulsation propre ω_{1_p}, les amplitudes de mouvement s'obtiennent en remplaçant ω_p par ω_{1_p} dans l'une des équations algébriques ci-dessus. Ce qui donne :

$$(-\omega_{1_p}^2 + \omega_1^2)\widetilde{A}_1 = \frac{k}{m_1}\widetilde{A}_2$$

ou encore

$$\frac{\widetilde{A}_1^1}{\widetilde{A}_2^1} = \frac{k}{m_1(\omega_1^2 - \omega_{1_p}^2)} \qquad (5.17)$$

On a rajouté un indice 1 aux amplitudes pour signifier que ces derniers correspondent au premier mode. Le rapport des amplitudes s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{\widetilde{A}_1^1}{\widetilde{A}_2^1} = \frac{2k}{m_1\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2}\right)} > 0$$

Ce qui donne

$$\frac{\widetilde{A}_1^1}{\widetilde{A}_2^1} = \frac{A_1^1}{A_2^1} e^{j(\varphi_1^1 - \varphi_2^1)}$$

où A_1^1 et A_2^1 sont les valeurs absolues des amplitudes de mouvement des deux masses. Les phases φ_1^1 et φ_2^1 doivent être, dans ce cas, égales (ou différentes d'un angle 2π).

Les masses oscillent en phase.

Pour le mode 2, correspondant à la pulsation propre ω_{2_p}, les amplitudes de mouvement s'obtiennent en remplaçant ω_p par ω_{2_p} dans l'une des équations algébriques ci-dessus. Ce qui donne :

$$(-\omega_{2_p}^2 + \omega_1^2)\widetilde{A}_1 = \frac{k}{m_1}\widetilde{A}_2$$

ou encore

$$\frac{\widetilde{A}_1^2}{\widetilde{A}_2^2} = \frac{k}{m_1(\omega_1^2 - \omega_{2p}^2)} \tag{5.18}$$

On a rajouté un indice 2 aux amplitudes pour signifier que ces derniers correspondent au premier mode. Le rapport des amplitudes s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{\widetilde{A}_1^2}{\widetilde{A}_2^2} = \frac{2k}{m_1\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4K^2\omega_1^2\omega_2^2}\right)} < 0$$

Ce qui donne

$$\frac{\widetilde{A}_1^2}{\widetilde{A}_2^2} = -\frac{A_1^2}{A_2^2} e^{j(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)}$$

où A_1^2 et A_2^2 sont les valeurs absolues des amplitudes de mouvement des deux masses. Les phases φ_1^2 et φ_2^2 doivent être différentes d'un angle π. Les masses oscillent dans ce cas en opposition de phase.

Les solutions générales s'écrivent sous la forme d'une superposition des deux modes propres, à savoir :

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1(t) = A_1^1 e^{j(\omega_{1p}t + \varphi_1^1)} + A_1^2 e^{j(\omega_{2p}t + \varphi_1^2)} \\ \widetilde{x}_2(t) = A_2^1 e^{j(\omega_{1p}t + \varphi_2^1)} + A_2^2 e^{j(\omega_{2p}t + \varphi_2^2)} \end{cases} \tag{5.19}$$

Tenant compte des relations obtenues entre les amplitudes de mouvement des masses pour chaque mode de vibration ainsi que celles qui existent entre les phases, il est possible de réécrire les solutions sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1(t) = & A_1^1 e^{j(\omega_{1p}t + \varphi_1^1)} & + & A_1^2 e^{j(\omega_{2p}t + \varphi_1^2)} \\ \widetilde{x}_2(t) = & A_1^1 \dfrac{m_1(\omega_1^2 - \omega_{1p}^2)}{k} e^{j(\omega_{1p}t + \varphi_1^1)} & - & A_1^2 \dfrac{m_1(\omega_1^2 - \omega_{2p}^2)}{k} e^{j(\omega_{2p}t + \varphi_1^2)} \end{cases} \tag{5.20}$$

Les constantes A_1^1, A_1^2, φ_1^1 et φ_1^2 seront définies par les conditions initiales appliquées sur le système.

Remarque: puisque que les mouvements des masses du système sont des quantités mesurables donc réelles, il serait utile de prendre la partie réelle des solutions complexes ci-dessus, à savoir :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = A_1^1 \cos(\omega_{1p}t + \varphi_1^1) + A_1^2 \cos(\omega_{2p}t + \varphi_1^2) \\ \tilde{x}_2(t) = A_1^1 \dfrac{m_1(\omega_1^2 - \omega_{1p}^2)}{k} \cos(\omega_{1p}t + \varphi_1^1) - A_1^2 \dfrac{m_1(\omega_1^2 - \omega_{2p}^2)}{k} \cos(\omega_{2p}t + \varphi_1^2) \end{cases}$$

5.2 Types de couplage:

En fait, il existe plusieurs types de couplage :

a- **Couplage par élasticité** où deux sous systèmes mécaniques (pendules simples) sont assemblés à travers un ressort, ou encore, leurs analogues électriques, à savoir deux sysèmes électriques (circuits LC) qui sont reliés par un condensateur.

b- **Couplage par viscosité** où on utilise un amortsisseur (résistance pour un système électrique) pour coupler deux pendules simples (circuits LC).

c- **Couplage par inertie** représenté par l'exemple d'un pendule double et où son équivalent électrique serait deux circuits LC reliés par une bobine d'inductance.

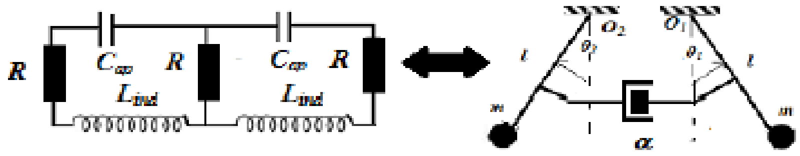


Figure 5.5: Couplage équivalent, Résistance-Force de frottement

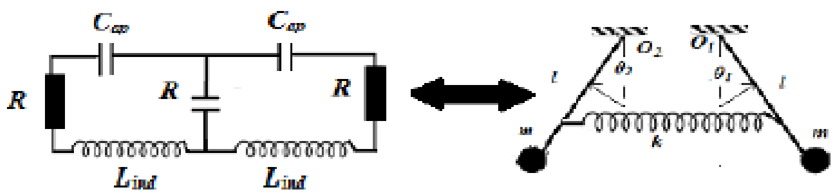


Figure 5.6 : Couplage équivalent, Capacité-Ressort

5.3 Battements :

Reprenons l'exemple du système de deux masses identiques m attachées horizontalement à trois ressorts de raideur identique k et se déplaçant sans frottement sur une droite d'un plan horizontal.

Pour le couplage les deux sous-systèmes identiques, on a :

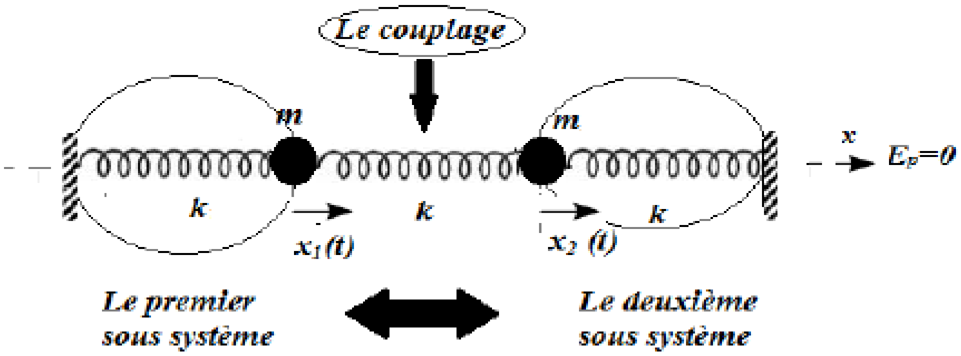


Figure 5.6: Mouvement oscillatoire couplé de deux sous-systèmes identiques

Les nouvelles équations du mouvement s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

On se propose pour un mode de vibration des solutions sous la forme sinusoïdale:

$$\begin{cases} x_1(t) = Ae^{j(\omega_p t+\varphi)} \\ x_2(t) = Be^{j(\omega_p t+\varphi)} \end{cases} \tag{5.22}$$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel, on obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} (-m\omega_p^2 + 2k)A - kB = 0 \\ (-m\omega_p^2 + 2k)B - kA = 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

Le système admet des solutions non triviales si seulement si le déterminant de sa matrice est nul, d'où :

$$\begin{vmatrix} -m\omega_p^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega_p^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \tag{5.24}$$

On obtient alors l'équation paramétrique suivante :

$$(-m\omega_p^2 + 2k)^2 - k^2 = 0 \tag{5.25}$$

Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{k}{m} \\ \omega_{2p}^2 = 3\dfrac{k}{m} \end{cases} \tag{5.26}$$

Les solutions générales sont la superposition des deux modes propres et sont de de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_{1p}t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega_{2p}t+\varphi_2) \\ x_2(t) = B_1\cos(\omega_{1p}t+\varphi_1) + B_2\cos(\omega_{2p}t+\varphi_2) \end{cases} \tag{5.27}$$

Pour le premier mode correspondant à la pulsation propre ω_{1p}, on a :

$$\omega_p = \omega_{1p} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et en remplaçant dans l'une des équations du système algébrique ci-dessus on trouve

$$(-m\omega_{1p}^2 + 2k)A_1 - kB_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = B_1 = A$$

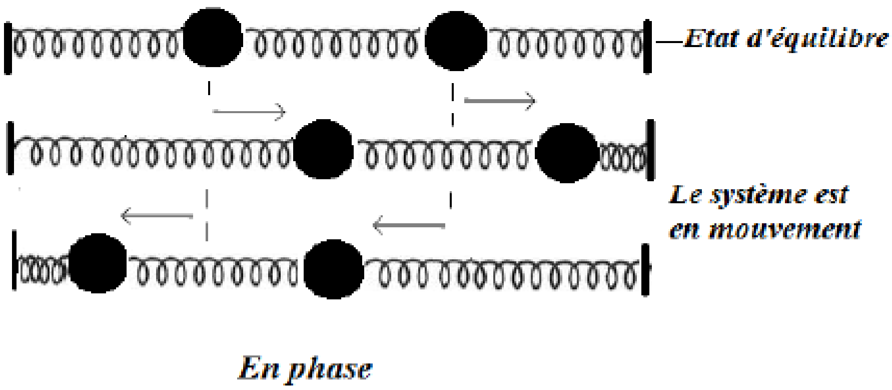


Figure 5.8: Etat du système pour le premier mode.
« En phase »

Dans ce mode les deux masses oscillent à la même pulsation $\omega_{1p} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ avec la même amplitude A, en phase.

Pour le **deuxième mode** correspondant à la pulsation propre ω_{2p}, on a :

$$\omega_p = \omega_{2p} = \sqrt{3\frac{k}{m}}$$

et en remplaçant dans l'une des équations du système algébrique ci-dessus on trouve

$$(-m\omega_{2p}^2 + 2k)A_2 - kB_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_2 = -B_2 = B$$

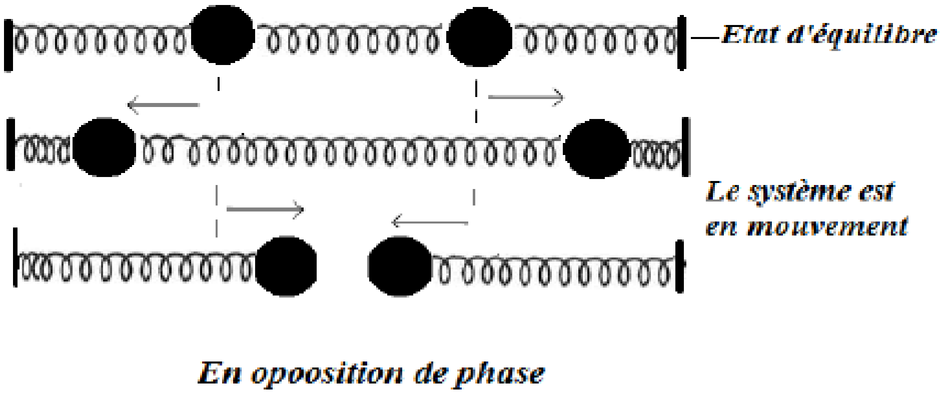


Figure 5.9 : **Etat du système pour le deuxième mode.**
« En opposition de phase »

Dans ce mode les deux masses oscillent à la même pulsation $\omega_{2p} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ avec la même amplitude B, en opposition de phase.

Les solutions générales deviennent alors:

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_{1p}t + \varphi_1) + B\cos(\omega_{2p}t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_{1p}t + \varphi_1) - B\cos(\omega_{2p}t + \varphi_2) \end{cases} \tag{5.29}$$

Où les constantes A, B, φ_1 et φ_2 seront définies par les conditions initiales.

Pour le besoin de notre étude du phénomène dit de battement il s'avère utile d'appliquer les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_0 \quad \dot{x}_1(t) = 0 \\ x_2(t) = 0 \quad \dot{x}_2(t) = 0 \end{cases} \tag{5.30}$$

Cela signifie qu'à $t = 0$ on écarte une masse de sa position d'équilibre d'une distance X_0 tout en gardant l'autre masse à sa position d'équilibre ensuite on les lâche sans vitesse initiales. Après remplacement dans les solutions générales, on obtient les quatre équations suivantes:

$$\begin{cases} A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2 = X_0 & (1) \\ A\cos\varphi_1 - B\cos\varphi_2 = 0 & (2) \\ -A\omega_{1p}\sin\varphi_1 - B\omega_{2p}\sin\varphi_2 = 0 & (3) \\ -A\omega_{1p}\sin\varphi_1 + B\omega_{2p}\sin\varphi_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

L'addition des équations (1) et (2) d'une part et les équations (3) et (4) donne :

$$\begin{cases} A\cos\varphi_1 = \dfrac{X_0}{2} & (5) \\ A\sin\varphi_1 = 0 & (6) \end{cases}$$

en sommant les carrés des équations (5) et (6) on obtient :

$A = \dfrac{X_0}{2}$, et de (6) on déduit que $\varphi_1 = 0$.

De même, la soustraction des équations (1) et (2) d'une part et les équations (3) et (4) donne :

$$\begin{cases} B\cos\varphi_2 = \dfrac{X_0}{2} & (7) \\ B\sin\varphi_2 = 0 & (8) \end{cases}$$

en sommant les carrés des équations (7) et (8) on obtient :

$B = \dfrac{X_0}{2}$, et de (8) on déduit que $\varphi_2 = 0$.

On en arrive donc aux équations horaires du mouvement qui s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{X_0}{2}\left[\cos\omega_{1p}t + \cos\omega_{2p}t\right] \\ x_2(t) = \dfrac{X_0}{2}\left[\cos\omega_{1p}t - \cos\omega_{2p}t\right] \end{cases} \quad (5.31)$$

Ce résultat est très important car il nous renseigne sur le fait que le mouvement des deux masses, soumises aux conditions initiales précédentes, est la superspoition de deux mouvements sinusoïdaux simples de pulsations différentes. C'est un mouvement complexe où les deux modes propres d'oscillation contribuent équitablement au mouvement du système. Dans ce cas, on dit que les deux modes propres d'oscillation du système sont excités. Cependant, la forme mathématique donnée des solutions n'est pas si intuitive au point de nous permettre de concevoir, *grosso modo*, la manière avec laquelle les masses vont osciller. Pour ce faire, il est utile de réarranger les formes mathématiques des solutions, en ayant recours à des relations trigonométriques bien connues, à savoir :

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

et

$$\cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ce qui permet de réécrire les solutions ci-dessus sous la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_0\left[\cos\left(\dfrac{\omega_{1p}-\omega_{2p}}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_{1p}+\omega_{2p}}{2}t\right)\right] \\ x_2(t) = X_0\left[\sin\left(\dfrac{\omega_{1p}-\omega_{2p}}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_{1p}+\omega_{2p}}{2}t\right)\right] \end{cases}$$

Un changement de notation nous permet d'écrire :

$$\omega_{mod} = \frac{\omega_{2p}-\omega_{1p}}{2}$$

dite pulsation de modulation et

$$\omega_{moy} = \frac{\omega_{1p}+\omega_{2p}}{2}$$

dite pulsation moyenne.

De nouveau, les solutions s'expriment sous la forme condensée suivante:

$$x_1(t) = X_0 \cos \omega_{mod} t . \cos \omega_{moy} t \qquad (5.32)$$

et

$$x_2(t) = X_0 \sin \omega_{mod} t . \sin \omega_{moy} t \qquad (5.33)$$

Ces deux formes de solutions sont plus intuitives à expliquer, car il est possible de voir le mouvement des masses comme un mouvement ' sinusoïdal simple' de pulsation ω_{moy} mais avec une ampliude $X_0 \cos \omega_{mod} t$ (pour la première masse) qui change sinusoïdalement dans le temps à une pulsation ω_{mod}. On dit que l'amplitude du mouvement est **modulée**.

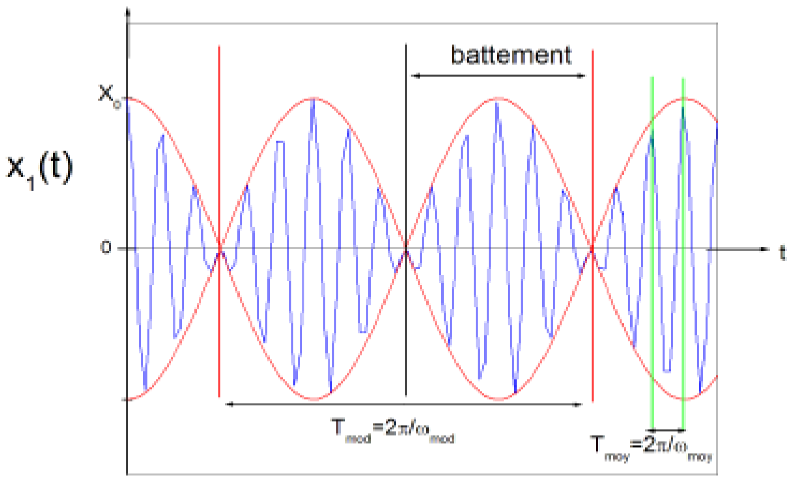


Figure 5.10: Phénomène de battement pour la première masse

On trace sur la figure 5.10 l'évolution de $x_1(t)$ et on voit que la masse fait un mouvement complexe (l'amplitude part de zéro, atteint son maximum puis retrouve sa valeur nulle) qui se répète après chaque intervalle de temps égal à $T_{battement} = \frac{T_{mod}}{2}$, où $T_{mod} = \frac{2\pi}{\omega_{mod}}$ est la période de modulation de l'amplitude du mouvement. Ce mouvement est appelé **battement**. D'autre part, on définit $T_{moy} = \frac{2\pi}{\omega_{moy}}$ comme la période d'oscillation de la masse. Dans le cas où les deux pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p} sont très proches l'une de l'autre, l'amplitude $X_0 \cos\omega_{mod} t$ ne varie que très lentement comparée aux oscillations rapides de $\cos\omega_{moy} t$ et la masse exécuterait un mouvement presque sinusoïdal. La deuxième masse, lâchée à partir de sa position d'équilibre, exécute un mouvement semblable avec une seule différence : elle est en quandrature de phase avec la première masse (voir figure 5.11).

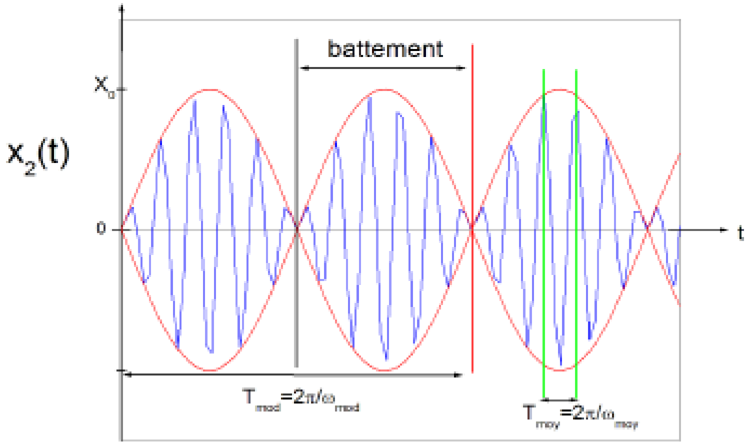


Figure 5.11: Phénomène de battement pour la deuxième masse

Au moment où l'une des deux masses s'immobilise, l'autre masse est à son maximum ; toute l'énergie du système étant transférée vers cette denière.

Une période de battement est donc le temps que fait l'énergie de vibration dans son aller-retour complet entre les deux masses.

5.4 Oscillations forcées d'un système non amorti à deux degrés de liberté :

Reconsidérons le système mécanique symétrique ci-dessus, et on applique une force extérieure de forme sinusoïdale au premier sous système qui s'exprime comme suit :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = R_e\left\{F_0 e^{j\Omega t}\right\} \tag{5.34}$$

Les équations d'Euler-Lagrange qui correspondent à cette situation physique s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F_0 \cos(\Omega t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{5.35}$$

La seconde équation ne contient pas de terme de force extérieure car cette dernière s'applique directement sur la deuxième masse. Après dérivation on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_0\cos(\Omega t) = R_e\{F_0 e^{j\Omega t}\} \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \qquad (5.36)$$

Pour résoudre le système d'équations différentielles ci-dessus on suppose que le même système mécanique est maintenant soumis à une force complexe $F(t) = F_0 e^{j\Omega t}$. Après résolution, on revient à notre cas physique en prenant la partie réelle de la solution obtenue. En effet, on a

$$\begin{cases} m\ddot{\tilde{x}}_1 + 2k\tilde{x}_1 - k\tilde{x}_2 = F_0 e^{j\Omega t} \\ m\ddot{\tilde{x}}_2 + 2k\tilde{x}_2 - k\tilde{x}_1 = 0 \end{cases} \qquad (5.37)$$

Dans le régime permanent, les solutions ont la même forme que le second membre, à savoir:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = \tilde{x}_{1p}(t) = \tilde{A}e^{j(\Omega t)} \\ \tilde{x}_2(t) = \tilde{x}_{2p}(t) = \tilde{B}e^{j(\Omega t)} \end{cases} \qquad (5.38)$$

avec $\tilde{A} = Ae^{j\varphi_a}$ et $\tilde{B} = Be^{j\varphi_b}$.

En remplaçant les solutions proposées dans le système différentiel, on obtient le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{cases} (-m\Omega^2 + 2k)\tilde{A} - k\tilde{B} = F_0 \\ (-m\Omega^2 + 2k)\tilde{B} - k\tilde{A} = 0 \end{cases} \qquad (5.39)$$

avec deux inconnues $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ dont les expressions sont données par ce qui suit :

$$\tilde{A} = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & -m\Omega^2 + 2k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\Omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\Omega^2 + 2k \end{vmatrix}} = \frac{\frac{F_0}{m}\left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)}{(\Omega^2 - \omega_{1p}^2)(\Omega^2 - \omega_{2p}^2)} = \frac{\frac{F_0}{m}\left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)}{\left(\Omega^2 - \frac{k}{m}\right)\left(\Omega^2 - \frac{3k}{m}\right)} \qquad (5.40)$$

et

$$\tilde{B} = \frac{\begin{vmatrix} -m\Omega^2 + 2k & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -m\Omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\Omega^2 + 2k \end{vmatrix}} = \frac{\frac{F_0 k}{m^2}}{(\Omega^2 - \omega_{1p}^2)(\Omega^2 - \omega_{2p}^2)} = \frac{\frac{F_0 k}{m^2}}{\left(\Omega^2 - \frac{k}{m}\right)\left(\Omega^2 - \frac{3k}{m}\right)} \qquad (5.41)$$

Tout d'abord, il est utile de remarquer que les inconnues $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ ont des valeurs réelles négatives ou positives selon la valeur de la pulsation de la force extérieure Ω . Cela signifie que les valeurs des phases des masses par rapport à la force excitatrice sont soit nulles $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = 0$ soit $\varphi_A = \pi$, $\varphi_B = \pi$. En effet, si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont positives, il serait possible de les écrire sous la forme

$$\tilde{A} = Ae^{j\varphi_A} = Ae^{j0}$$

et

$$\tilde{B} = Be^{j\varphi_B} = Be^{j0}$$

où A et B sont les modules des nombres complexes $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$. Dans ce cas, les masses oscilleront en phase avec la force extérieure. Dautre part, si $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont négatives, il serait possible de les écrire sous la forme

$$\tilde{A} = -Ae^{j\varphi_A} = Ae^{j\pi}$$

et

$$\tilde{B} = -Be^{j\varphi_B} = Be^{j\pi}$$

Dans ce cas les masses oscilleront en opposition de phase avec la force extérieure. Ce sont là les deux seules possibilités d'état de phase des masses par rapport à la force extérieure. Si le système était soumis à des forces d'amortissment, les valeurs des phases prendront des valeurs entre 0 et π. On doit noter ici que l'état de phase d'une masse par rapport à la force extérieure est indépendante de l'état de phase de l'autre masse par rapport à cette même force, c'est à dire qu'on peut tomber sur un cas où une masse oscille en phase alors que l'autre est en opposition de phase avec la force extérieure.

Pour une valeur $\Omega = 0$, les amplitudes de mouvement des masses sont égales à

$$\tilde{A} = \frac{\frac{F_0}{m}\left(\frac{2k}{m}\right)}{\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{3k}{m}\right)} = \frac{2F_0}{3k} \qquad (5.42)$$

et

$$\tilde{B} = \frac{\frac{F_0 k}{m^2}}{\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{3k}{m}\right)} = \frac{F_0}{3k} \qquad (5.43)$$

Problème 1:

Deux pendules simples identiques O_1A_1 et O_2A_2 de masse m et de longueur l, sont couplés par un ressort horizontal de raideur k qui relie les deux masses A_1 et A_2, **figure** 14.5. A l'équilibre, le ressort horizontal a sa longueur naturelle l_0 tel que $l_0 = O_1O_2$.

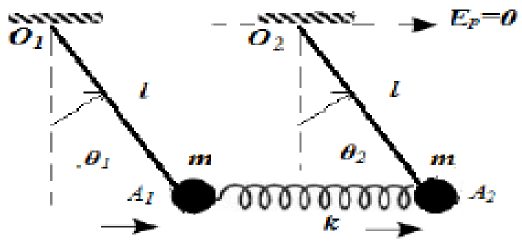


Figure 5.14: Couplage de deux pendules identiques par un ressort

Les deux pendules sont repérés, à l'instant t, par leurs élongations angulaires $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ supposées petites par rapport à leur position verticale d'équilibre. On désignera g l'accélération de la pesanteur.

Modes propres :

- Déterminer le Lagrangien du système.
- Etablir les équations différentielles couplées vérifiées par les deux élongations angulaires instantanées $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$
- Exprimer en fonction de g, k, l *et* m, les deux pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p} de ce système.
- *Applications numériques* :

  Calculer ω_{1p} et ω_{2p} sachant que: $m= 100g$; $l= 80cm$; $k=9.2\ N/m$ et $g= 9.8m/s^2$.
- On lâche sans vitesses initiales le système à l'instant $t=0$ dans les conditions initiales suivantes :

$$\theta_1=\theta_0 \text{ et } \theta_2=0$$

- En déduire les lois d'évolution. $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ aux instants t >0.
- Quel est le phénomène étudié.

<u>*Modes forcés :*</u>

La masse A est soumise à une force excitatrice horizontale de forme :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

- Ecrire les nouvelles équations différentielles couplées en $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
- Exprimer les relations complexes qui concernent les vitesses linéaires V_1 et V_2 des points A_1 et A_2 en régime forcé.
- En déduire l'impédance d'entrée complexe $\overline{Z}_e = \frac{F}{\overline{V}_1}$.

<u>***Solution :***</u>

- Le Lagrangien du système :

  Le système a deux degrés de liberté exprimés en θ_1, θ_2

  ✓ L'énergie cinétique on a :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 V_{m_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 V_{m_2}^2$$

En calculant les vitesses par rapport au repère fixe :

$$\begin{aligned} &\vec{Om}_1 = \begin{pmatrix} x_{m_1} = l\sin\theta_1 \\ y_{m_1} = l\cos\theta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}_{m_1} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{m_1} = l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ \dot{y}_{m_1} = -l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \end{pmatrix} \\ &\vec{Om}_2 = \begin{pmatrix} x_{m_2} = l\sin\theta_2 \\ y_{m_2} = l\cos\theta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}_{m_2} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{m_2} = l\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ \dot{y}_{m_2} = -l\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} V_{m_1}^2 = \dot{x}_{m_1}^2 + \dot{y}_{m_1}^2 \\ V_{m_2}^2 = \dot{x}_{m_2}^2 + \dot{y}_{m_2}^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$E_c = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_i^2$$

✓ Pour l'énergie potentielle on a :

$$E_p = \frac{1}{2}k(l\theta_1 - l\theta_2)^2 - \sum_{i=1}^{2} mgl\cos\theta_i$$

✓ Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \theta_1, \theta_2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_i^2 - \frac{1}{2}k(l\theta_1 - l\theta_2)^2 + \sum_{i=1}^{2} mgl\cos\theta_i$$

- Les équations différentielles couplées sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\theta_1 = \frac{k}{m}\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\theta_2 = \frac{k}{m}\theta_1 \end{cases}$$

- Les pulsations propres ω_{1p} et ω_{2p}:
  - On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = Ae^{j(\omega_p t+\varphi)} \\ \theta_2(t) = Be^{j(\omega_p t+\varphi)} \end{cases}$$

  - En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} (-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})A - \frac{k}{m}B = 0 \\ -\frac{k}{m}A + (-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})B = 0 \end{cases}$$

  - Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0$$

D'où :

$$(-\omega_p^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})^2 - (\frac{k}{m})^2 = 0$$

  - Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \quad \omega_{1p} = 3.5 rad/s \\ \omega_{2p}^2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} \Rightarrow \quad \omega_{2p} = 14 rad/s \end{cases}$$

- Les solutions générales s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos(\omega_{1p} t + \varphi) + A_2 \cos(\omega_{2p} t + \varphi) \\ \theta_2(t) = B_1 \cos(\omega_{1p} t + \varphi) + B_2 \cos(\omega_{2p} t + \varphi) \end{cases}$$

  - En appliquant les conditions initiales, on trouve :

$$\begin{cases} x_1(t) = C\cos\frac{\omega_{1p} + \omega_{2p}}{2} t \cos\frac{\omega_{1p} - \omega_{2p}}{2} t \\ x_2(t) = -C\sin\frac{\omega_{1p} + \omega_{2p}}{2} t \sin\frac{\omega_{1p} - \omega_{2p}}{2} t \end{cases}$$

D'où les solutions générales s'expriment alors comme suit:

$$\begin{cases} x_1(t) = c\cos\Delta\omega t \cos\omega t \\ x_2(t) = c\sin\Delta\omega t \sin\omega t \\ Avec \quad \Delta\omega = \frac{\omega_{2p} - \omega_{1p}}{2} t \quad et \quad \omega = \frac{\omega_{2p} + \omega_{1p}}{2} t \end{cases}$$

- Le phénomène étudié est les battements.

Modes forcés :

- Les nouvelles équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta}_1 + (mg + kl)\theta_1 - kl\theta_2 = F_0 \cos\omega t \\ ml\ddot{\theta}_2 + (mg + kl)\theta_2 - kl\theta_1 = 0 \end{cases}$$

- Les relations complexes qui concernent les vitesses linéaires V_1 et V_2 :
  - Les solutions particulières sont :

$$\begin{cases} \tilde{V}_1(t) = j\omega l\theta_1 \\ \tilde{V}_2(t) = j\omega l\theta_2 \end{cases}$$

  - En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})\tilde{V}_1 - \frac{k}{m}\tilde{V}_2 = j\omega\frac{F_0}{m}e^{j\omega t} \\ -\frac{k}{m}\tilde{V}_1 + (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})\tilde{V}_2 = 0 \end{cases}$$

- L'impédance d'entrée complexe :

$$\overline{Z}_e = \frac{F}{\tilde{V}_1} = \frac{j}{\omega}\left[\frac{k^2}{\frac{mg}{l} + k - m\omega^2} - (\frac{mg}{l} + k - m\omega^2)\right]$$

- Ce système mécanique fonctionne comme un filtre de fréquence puisque son impédance varie en fonction de la fréquence.

Problème 6:

Soit le système mécanique, constitué de deux pendules simples de longueur l et de masses m_1, m_2 représentés dans la figure 20.5 comme suit :

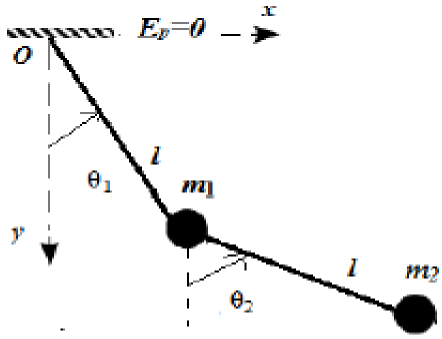


Figure 5.20: Couplage de deux pendules simples par la masse

- Etablir le Lagrangien du système
- Donner les équations différentielles du mouvement pour les faibles oscillations.
- On pose les constantes suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \text{ et } \mu = \frac{m_1}{m_2}.$$

Déterminer dans ce cas les pulsations propres du système ω_{1p} et ω_{2p} en fonction des paramètres μ et ω_0.

- Déterminer les solutions générales

Solution:

- Le Lagrangien du système s'écrit : est déjà calculé dans le problème (1.1-B)

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}_2^2 + m_2 l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$+ m_1 g l\cos\theta_1 + m_2 g l(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

- Le système différentiel devient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m_1 + m_2)l\ddot\theta_1 + m_2 l\ddot\theta_2 (m_1 + m_2)g\theta_1 = 0 \\ l\ddot\theta_2 + l\ddot\theta_1 + g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

D'ou :

$$\begin{cases} (1+\mu)\ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 (1+\mu)\omega_0^2\theta_1 = 0 \\ \ddot\theta_2 + \ddot\theta_1 + \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Avec :

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \text{ et } \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

- Les pulsations propres :
  - On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = Ae^{j(\omega_p t+\varphi)} \\ \theta_2(t) = Be^{j(\omega_p t+\varphi)} \end{cases}$$

  - En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire symétrique suivant :

$$\begin{cases} (-\omega_p^2 + \omega_0^2)(1+\mu)A - \omega_p^2 B = 0 \\ -\omega_p^2 A + (-\omega_p^2 + \omega_0^2)B = 0 \end{cases}$$

  - Le système admet des solutions non nulles si seulement si :

$$det = 0$$

D'où

$$(-\omega_p^2 + \omega_0^2)^2(1+\mu) - \omega_p^4 = 0$$

  - Les deux pulsations propres sont ω_{1p} et ω_{2p} exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \omega_{1p}^2 = \dfrac{\sqrt{1+\mu}}{1+\sqrt{1+\mu}}\omega_0^2 \\ \omega_{1p}^2 = \dfrac{\sqrt{1+\mu}}{-1+\sqrt{1+\mu}}\omega_0^2 \end{cases}$$

- Les solutions générales sont de la forme:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1\cos(\omega_{1p}t+\varphi) + A_2\cos(\omega_{2p}t+\varphi) \\ \theta_2(t) = B_1\cos(\omega_{1p}t+\varphi) + B_2\cos(\omega_{2p}t+\varphi) \end{cases}$$